Inhaltsverzeichnis

1 Der elektrische Strom **4**
1.1 Ladungserhaltung, Kontinuitätsgleichung 6

2 Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz **8**
2.1 Driftgeschwindigkeit und Leitfähigkeit 8
2.1.1 Das Konzept der Beweglichkeit bei der Stromleitung: 10
2.2 Das Ohmsche Gesetz 11
2.3 Beispiele für Anwendungen des Ohmschen Gesetzes 12
2.3.1 Kontinuierlicher Spannungsteiler 12
2.3.2 Aufladung eines Kondensators 12
2.4 Stromleistung und Joulesche Wärme 14

3 Kirchhoffsche Regeln, Elektrische Stromkreise **14**
3.1 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen 16
3.2 Spannungsteiler 16
3.3 Wheatstonesche Brückenschaltung 16

4 Elektrischer Strom im Festkörper **17**
4.1 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes 17
4.2 Elektrizitätsleitung in Metallen 19
4.3 Bändermodell der elektrischen Leitung 21
4.3.1 Austrittsarbeit, Kontakt- oder Berührungsspannung 23
4.3.2 Thermoelektische Effekte: Seebeck- und Peltier-Effekt 26

5 Halbleiter **27**
5.1 Eigenhalbleitung 27
5.2 Störstellenhalbleitung 28
5.3 Halbleiterbauelemente und deren Anwendung 30
5.3.1 **Dioden, Gleichrichter** 30
5.3.2 **Transistoren** 30

6 Elektrizitätsleitung in Flüssigkeiten **32**
6.1 Leitfähigkeit in Elektrolyten 34
6.1.1 Galvanische Elemente und Volta'sche Spannungsreihe 35
6.1.2 **Voltasches oder Galvanisches Element:** 36
6.2 Batterien und Akkumulatoren 37
6.2.1 Akkumulator 38
6.3 Chemische Brennstoffzellen 39
6.4 Zum Innenwiderstand von Spannungs- und Stromquellen 41

7 Elektrischer Strom im Vakuum **42**
7.1 Elektronenemission aus Festkörpern 42
7.2 Raumladungsgesetz 43
7.3 Elektronenröhren 46

8 Elektrischer Strom im Gas, elektrische Gasentladung **48**
8.1 Ionisationsmechanismen 48
8.2 Elektrische Gasentladungen 49

9 Statische Magnetfelder **52**
9.1 Magnetische Dipole; Polstärke . . . 52
9.2 Magnetfelder stationärer Ströme . . . 53
9.2.1 Magnetischer Fluß, magnetische Spannung und Ampèresches Gesetz . . . 55
9.2.2 Magnetfeld eines geraden Leiters . . . 56
9.2.3 Magnetfeld im Inneren einer langen Spule . . . 58
9.3 Das Vektorpotential . . . 58
9.4 Das magnetische Feld einer beliebigen Stromverteilung, Biot-Savartsches Gesetz . . . 59
9.5 Beispiele zur Berechnung von Magnetfeldern spezieller Stromanordnungen . . . 61
9.5.1 Magnetfeld eines geraden Leiters . . . 61
9.5.2 Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife . . . 61
9.5.3 Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares . . . 63
9.5.4 Feld einer Zylinderspule . . . 64

10 Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld **65**
10.1 Lorentzktraft . . . 65
10.1.1 Experimentelle Demonstration der Lorentzkraft . . . 68
10.1.2 Elektronen- und Ionenoptik mit B-Feldern . . . 69
10.1.3 Kräfte auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld . . . 71
10.1.4 Kräfte zwischen zwei parallelen stromführenden Leitern: SI Definition 1 A . . . 73

11 Elektromagnetisches Feld und Relativitätsprinzip **75**
11.1 Wie mißt man bewegte Ladungen? . . . 75
11.2 Ladungsinvarianz . . . 76
11.3 Nochmals Lorentzkraft . . . 77
11.4 Das elektrische Feld einer bewegten Ladung . . . 78
11.5 Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld . . . 80
11.6 Relativistische Transformation von Ladungsdichte und Strom . . . 82
11.7 Transformationsgleichungen für das elektromagnetische Feld . . . 83
11.7.1 Ladungsinvarianz . . . 85

12 Zeitlich veränderliche Felder **85**
12.1 Faradaysches Induktionsgesetz . . . 86
12.1.1 Bewegung eines Leiters im homogenen Magnetfeld . . . 86
12.2 Lenzsche Regel . . . 89
12.2.1 Bewegung durch Induktion . . . 89
12.2.2 Wirbelströme . . . 92
12.2.3 Selbstinduktion und Gegeninduktion . . . 93
12.3 Energie des Magnetfeldes . . . 99
12.4 Maxwellscher Verschiebungsstrom . . . 99

13 Maxwellgleichungen und elektrodynamische Potentiale **101**

Physik I

Teil 3

Elektrizität und Magnetismus
Strom und Magnetismus

G.Hilscher
Institut für Festkörperphysik

Wintersemsester 2001

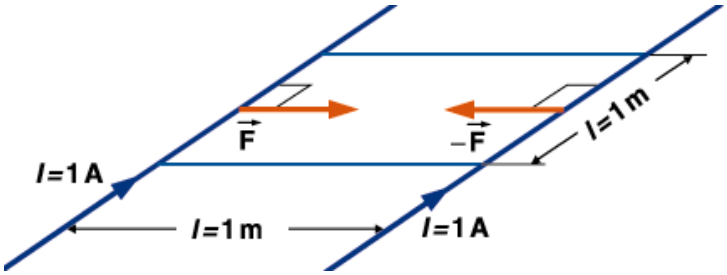


Abbildung 1: Zur Definition von 1A

1 Der elektrische Strom

Bisher haben wir stationäre Ladungsverteilungen $dQ = \rho.dV$ betrachtet, die ein $\vec{E}$-Feld erzeugen. Jetzt betrachten wir den umgekehrten Fall: Das $\vec{E}$-Feld übt eine Kraft $\vec{F} = Q.\vec{E}$ auf Ladungen aus. Damit die Ladungen ihren Bewegungszustand ändern, d.h. einen Strom bilden, müssen sie (teilweise) frei sein. Materialien, in denen das der Fall ist bezeichnen wir als Leiter. Freie Ladungsträger (Elektronen, Ionen) findet man in festen, flüssigen und gasförmigen Leitern:

- **Feste Leiter:**
  - Metalle (Normalleiter: positiver Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes, PTC)
    Supraleiter
  - Halbleiter (negativer Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes, NTC)
  - Isolatoren
- **Flüssige Leiter:**
  - Elektrolyte (Ionenleiter)
- **Gasförmige Leiter:**
  - Leitung im Vakuum mit freien Ladungsträgern (Elektronen, Ionen)
  - Gasentladungen / Plasmen.

Die Bewegung von Ladungsträgern verursacht elektrischen Strom; man definiert den Strom als die in der Zeiteinheit transportierte elektrische Ladung Q.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Die Einheit des elektrischen Stromes im SI-System ist das Ampère:[1]

$$1\text{A} = 1\text{C.s}^{-1}$$

Zur vorläufigen Definition können wir die Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C benützen: Der el. Strom hat die Stromstärke von 1A, wenn pro Sekunde

$$\frac{1}{e}\,\text{Elementarladungen/s} = 6,24 \cdot 10^{18}\ \text{Elektronen/s}$$

transportiert werden.

Die SI Definition des Ampère basiert auf der magnetische Kraftwirkung (Abb.1):

Die Stromstärke I hat den Wert 1A, wenn zwei im Abstand $r = 1$m parallel angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter im Vakuum mit vernachlässigbar kleinem Drahtquerschnitt, die von gleichen

[1] Andre Marie Ampère (1775-1836) entdeckte, daß zwischen stromdurchflossenen Leitern Kräfte auftreten.

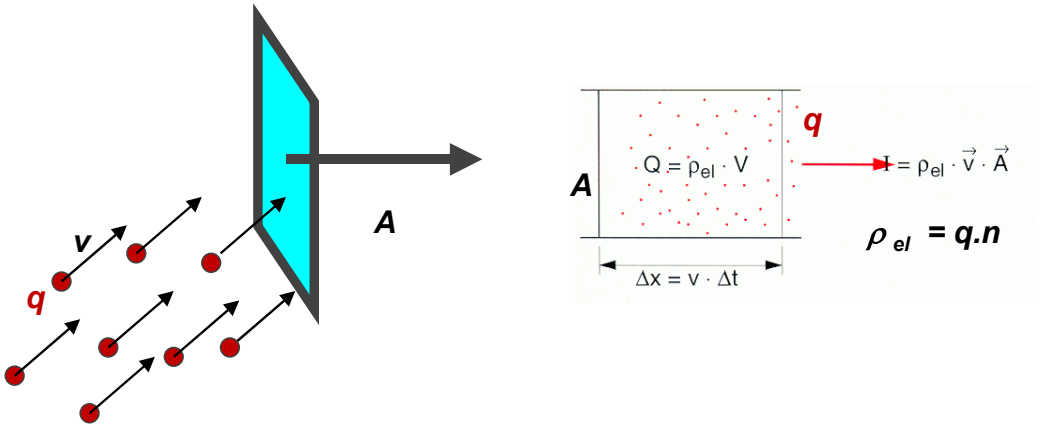


Abbildung 2: (a) Geladene Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ treten durch die Fläche $\vec{A}$, (b) Zusammenhang zwischen Stromstärke I und Ladungsdichte ρ_{el}.

zeitlich unveränderlichen Strömen I durchflossen werden, je 1m Leiterlänge die Kraft F =2.10^{-7}N aufeinander ausüben. (Siehe Magnetostatik).

Die *früher* gültige Definition bezieht sich auf die elektrolytische Abscheidung im Silber-Voltameter: 1 A ist jene Stromstärke, welche aus einer konzentrierten Silbernitratlösung pro Sekunde 1,118 mg Silber abscheidet.

Es kommt allerdings darauf an, daß Ladungen *eines* Vorzeichens bewegt werden, denn die Bewegung eines Körpers, der ja Ladungen von etwa 10^5 C/cm^3 enthält, ergibt noch keinen Strom, da hierbei genau gleichviele positive und negative Ladungen "fließen". Wir wollen eine bestimmte Situation gemäß Abb. 2 betrachten, wo Ladungen q mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch eine Fläche $\vec{A}$ fließen; dies ergibt den Strom I durch A:

$$I(\vec{A}) = q \cdot n \cdot \vec{v} \cdot \vec{A} = \rho_{el}\, \vec{v}.\vec{A} \tag{1}$$

mit n der Ladungsträgerdichte (= Zahl der Ladungen pro m^3) und der Ladungsdichte ρ_{el}.

Es wird für alle Ladungen gleiche Geschwindigkeit vorausgesetzt, und offensichtlich ist die Richtung, mit der die Teilchen die Fläche durcheilen, zu berücksichtigen. Haben wir es aber mit verschiedenen Ladungsträgerarten (z.B. Elektronen und Ionen, oder Ionen verschiedener Ladung) zu tun, so müssen für den Strom alle Anteile summiert werden:

$$I(\vec{A}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{A}.\underbrace{n_k\, q_k\, \vec{v}_k}_{\vec{j}_k} \quad . \tag{2}$$

Die **Stromdichte** ist der Ausdruck, der mit der Fläche multipliziert den Strom (die Stromstärke) ergibt. So gelangen wir zu dem auf die jeweilige Fläche bezogenen Strom. Die Stromdichte ist also eine Vektorgröße, $\vec{j}$: $[j] = \mathrm{A/m}^2$

$$\vec{j} = \sum_{k=1}^{N} n_k\, q_k\, \vec{v}_k \quad \text{und somit ist } I = \int_A \vec{j}.d\vec{A} \tag{3}$$

Betrachten wir einen bestimmten Leiter, so können wir uns vorstellen, daß die Elektronen die bewegten Ladungen sind. Die Elektronen haben durchaus verschiedene Geschwindigkeiten, und wir müssen zur Berechnung der Stromdichte eine mittlere Geschwindigkeit $\vec{v}$ verwenden: $\vec{j} = q \cdot n \cdot \vec{v}$. Mit der Ladungsdichte $\rho_{el} = n.q$ ergibt sich die Stromdichte

$$\vec{j} = \rho_{el}.\vec{v}$$

Die beweglichen Ladungen im Leiter sind üblicherweise Elektronen und entsprechen daher der Ele-

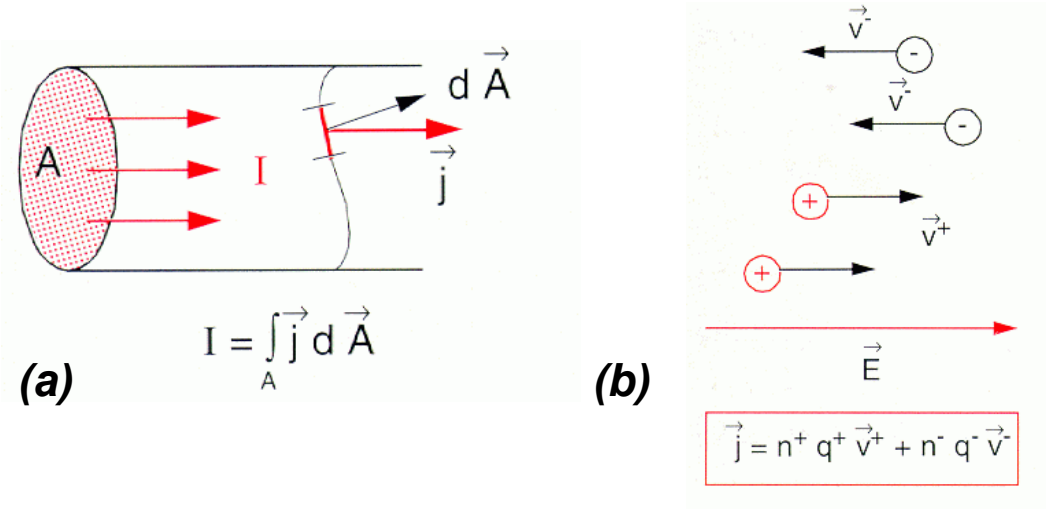


Abbildung 3: Zur Definition der Stromdichte (a), Stromdichte bei Leitern mit verschiedenen Ladungsträgern (b).

mentarladung $-e$. Sind Ladungen verschiedenen Vorzeichens vorhanden (Gasentladung), so ist die Nettoladungsdichte bzw. die Gesamtstromdichte:

$$\rho_{el} = \rho^+ + \rho^- = n^+q^+ + n^-q^- \qquad \vec{j} = n^+q^+\vec{v}^+ + n^-q^-.\vec{v}^-$$

In der Elektrotechnik wird aus historischen Gründen die Richtung des Stomes I **definiert** als die Flußrichtung positiver Ladungsträger (auch wenn sich später herausstellte, daß in Metallen der Strom von den Elektronen verursacht wird). Somit gilt also im metallischen Leiter:

$$\vec{j_e} = -e \cdot n_e \cdot \vec{v}_e \quad . \tag{4}$$

Meist ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger sehr groß, wenn sich diese aber regellos im Raum bewegen, ergibt dies keinen Strom. Erst wenn diesen nach allen Raumrichtungen gleichverteilten Geschwindigkeiten eine "Driftgeschwindigkeit" in einer bestimmten Richtung überlagert wird, kann eine Stromdichte im vorher besprochenen Sinne angegeben werden. Der Strom, der aus allen Richtungen durch eine gedachte Fläche geht, hebt sich für alle Flächenorientierung gerade auf (engl.: random current).

Ändert sich die Größe des Stromes zeitlich nicht, ist dies ein

$$\textbf{stationärer Strom:} \qquad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{j} = \text{konst.}$$

1.1 Ladungserhaltung, Kontinuitätsgleichung

Der Strom durch eine **geschlossene** (beliebig geformte) Oberfläche A kann analog zu Gleichung 2 geschrieben werden:

$$I(A) = \frac{dQ}{dt} = -\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad . \tag{5}$$

Das Minus kommt von der Konvention, daß der Strom positiv ist, wenn positive Ladung in das Volumen fließt, das die geschlossene Oberfläche umschließt. Da per Definition $d\vec{A}$ nach außen zeigt, ist das neg. Vorzeichen notwendig um I und damit die Ladungsänderung im Volumen positiv zu machen. Umgekehrt: Fließt ein Nettostrom aus dem Volumen durch die geschlossene Oberfläche ($\vec{j}$ und $d\vec{A}$ sind parallel), so ist dieser gleich der zeitlichen Abnahme der eingeschlossenen Ladung; siehe Abb. 4. Aus

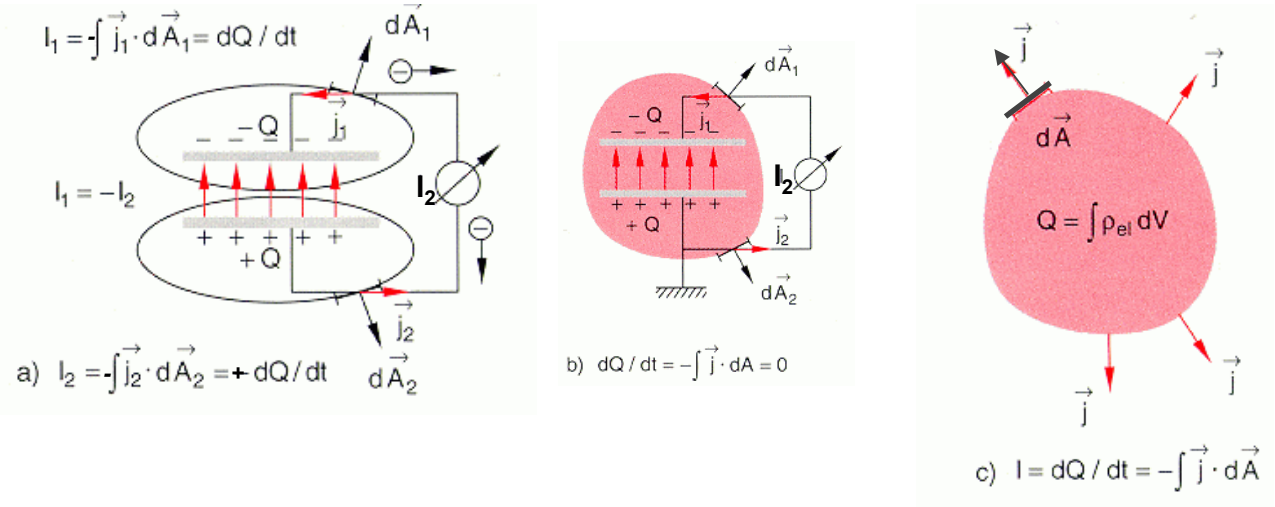


Abbildung 4: Zur Illustration der Kontinuitätsgleichung. (a) Entladung eines Kondensators, wobei der Strom durch eine geschlossene Fläche, die eine Platte umgibt, gleich der Änderung der Plattenladung ist (das Vorzeichen von dQ/dt ergibt sich aus dem Skalarprodukt). (b) der Gesamtstrom durch eine geschlossene Fläche, die den Kondensator umschließt, ist bei Auf- oder Entladung Null; in diesem Volumen ist $dQ/dt = 0$; das Amperemeter mißt den Entladestrom I_2. (c) Allgemeiner Fall bei dem die Fläche A eine Ladung im Volumen V umschließt.

dem Gaußschen Satz folgt für das obige Integral bei Betrachtung einer geschlossenen Fläche:

$$I = -\oint_{A(V)} \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\int_V \mathrm{div}\vec{j} \cdot dV$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho_{el}.dV = \int_V \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} dV$$

Die Kombination beider Gleichungen ergibt die **Kontinuitätsgleichung**

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \rho_{el}(\vec{r},t)}{\partial t}} \tag{6}$$

die besagt, daß Ladung weder erzeugt noch vernichtet werden kann, also eine Erhaltungsgröße ist. **Die negative zeitliche Änderung der Ladung ist gleich der gesamten Stromstärke aus dem Volumen, das diese geschlossene Oberfläche umgibt**.

Bei einer **stationären** Stromverteilung muß aber innerhalb einer derartigen geschlossenen Fläche auch die gesamte Ladung gleichbleiben, d.h.: $\partial\rho/\partial t = 0$: es darf weder *Nettoladung zu-, noch abströmen*, es gilt also:

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0 \ . \tag{7}$$

Stationäre Ströme sind quellenfrei

Dies führt für einen Leitungsknoten, der wieder mit einer geschlossenen Oberfäche umgeben ist, im stationären Fall zum **1. Kirchhoffschen Gesetz (Knotenregel)**: Die Summe aller in den Knoten fließenden Ströme (m Leiter, zufließende und abfließende mit verschiedenen Vorzeichen!) muß Null sein.

$$\sum_m I_m = 0 \ ; \tag{8}$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung können viele Probleme der Elektrizität gut behandelt werden, z.B. der Strom von Elektronen im Hochvakuum bei der Elektronenröhre (Abb.5).Wir haben es hier in

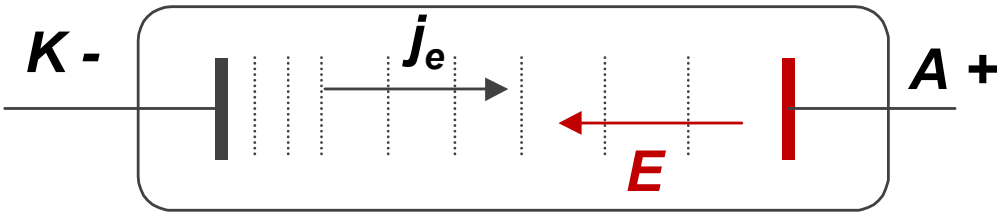


Abbildung 5: Stromdichte in einer Elektronenröhre

vereinfachter Form mit einem eindimensionalen Problem zu tun:

$$\begin{aligned} n_e &= n_e(x) \\ \varrho &= -n_e \cdot e \\ \vec{j}(x) &= \varrho(x) \cdot \vec{v}(x) \quad . \end{aligned}$$

Hier folgt aus der Stationärität der Stromdichte:

$$\mathrm{div}\vec{j} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial j(x)}{\partial x} = 0 \quad ,$$

d.h. die Stromdichte ist von x unabhängig, also überall *konstant*; dieses Ergebnis ist nicht selbstverständlich! Es sind nämlich weder die Geschwindigkeit, noch die Dichte der Ladungsträger überall gleich. Wir werden etwas später diese Beziehungen bei der Ableitung des Raumladungsgesetzes benötigen. Vor der Kathode einer solchen Diode ist die Geschwindigkeit kleiner und daher die Raumladung größer als in weiterer Entfernung von der Kathode.

2 Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz

2.1 Driftgeschwindigkeit und Leitfähigkeit

Auch ohne elektrisches Feld bewegen sich die frei beweglichen Ladungsträger in einem Leiter. So ist z. B. die Geschwindigkeitsverteilung der Ionen in einer leitenden Flüssigkeit durch deren thermisch bedingte Bewegung bei der Temperatur T bestimmt:

$$\overline{v}_{th} = \langle|\vec{v}|\rangle = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

Dies gibt für Cu^{++} -Ionen in einer $CuSO_4$ Lösung bei Raumtemperatur eine mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}_{th} = 300$ m/s. Die Leitungselektronen in Metallen werden als freies Elektronengas behandelt und haben auf Grund quantenmechanischer Effekte eine wesentlich höhere Geschwindigkeit (10^6 - 10^7 m/s). Die folgende Ableitung der Driftgeschwindigkeit und der Leitfähigkeit basiert auf einem einfachen Modell. Eine rigorose Berechnung der Transportkoeffizienten ist nur im Rahmen der Boltzmannschen Transportgleichung in Kombination mit der Fermistatistik möglich.

Durch Stöße der Ladungsträger mit den Atomen bzw. Molekülen des Leiters werden die Richtungen der Geschwindigkeiten statistisch in alle Richtungen verteilt, sodaß deren Mittelwert ohne äußeres Feld Null ist (Abb. 6). Daher ist auch der Mittelwert der Stromdichte Null:

$$\left\langle \vec{j} \right\rangle = nq \left\langle \vec{v} \right\rangle = 0$$

Die mittlere Zeit τ (Stoßzeit) zwischen zwei Stößen ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge Λ und der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}_{th}$ der Ladungsträger

$$\tau = \frac{\Lambda}{\overline{v}_{th}}$$

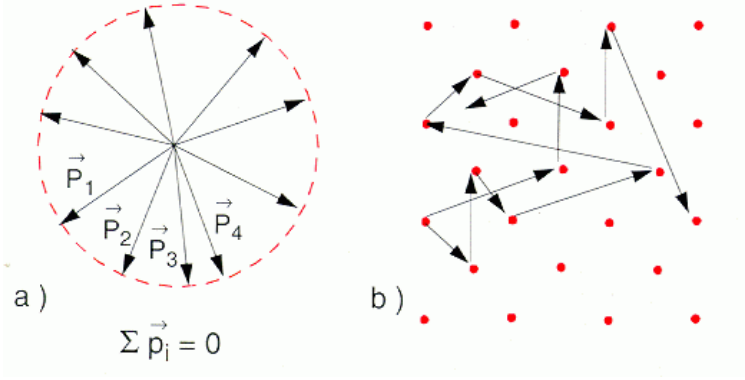


Abbildung 6: Trägt man die Impulse der Leitungselektronen eines Metalles auf, so bilden die Spitzen eine Kugeloberfl äche (die sogenannte Fermikugel) woraus ersichtlich ist, daß der Mittelwert aller Elektronenimpulse Null ist (a); schematischer Weg von 2 Elektronen imKristallgitter (b).

Für Cu^{++} -Ionen ist $\Lambda = 10^{-10}$ m und $\tau = 3.3 \times 10^{-13}$ s, während für Leitungselektronen in Cu (bei Raumtemperatur) $\Lambda = 4.10^{-8}$ m und $\overline{v}_{th} = 1,5.10^{6}$ m/s $\rightarrow \tau = 2,66.10^{-14}$ s ist.

Unter dem Einfluß des elektrischen Feldes erfahren die Ladungsträger mit der Masse m und der Ladung q eine Kraft $\vec{F} = q.\vec{E} = m.\vec{a}$ und somit eine Beschleunigung $\vec{a}$. Dieser Beschleunigung wirkt in einem Leiter nach einem einfachen Modell von Paul Drude (um 1900) eine Reibungskraft entgegen, die der hemmenden Wirkung der Stöße Rechnung trägt. (Die Reibungskraft wird proportional zur Geschwindigkeit angesetzt). Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung für einen Ladungsträger mit einer Driftgeschwindigkeit v_D:

$$m\frac{d\vec{v}_D}{dt} + \frac{m}{\tau}\vec{v}_D = q\vec{E}$$

Die Driftgeschwindigkeit entspricht einer zusätzlichen mittleren Geschwindigkeit, die durch das $\vec{E}$ Feld zwischen den Stößen verursacht wird. Für den hier betrachteten stationären Fall

$$\dot{v}_D = 0 \quad \text{ist} \quad \frac{m}{\tau}\vec{v}_D = q\vec{E}.$$

Mit diesem Ansatz für die Reibung erfahren die Ladungsträger während der mittleren Stoßzeit τ zwischen zwei Stößen die mittlere Zusatzgeschwindigkeit

$$\vec{v}_D = \langle \vec{v} - \vec{v}_{therm} \rangle = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

die aber wesentlich kleiner als ihre thermische Geschwindigkeit $\vec{v}_{therm}$ ist. (Abb. 7). Ohne äußeres Feld ist $\vec{v}_D = 0$. Bei Abschalten des Feldes relaxiert $\vec{v}$ mit der Abklingzeit τ (die der mittleren Stoßzeit entspricht) exponentiell gegen $\vec{v}_{th}$. Daher hat τ die Bedeutung einer *Relaxationszeit* (kommt von der Boltzmannschen Transporttheorie). Die Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ wird nach jedem Stoß geändert und für $v_D << v_{th}$ sind alle Richtungen nach dem Stoß gleich wahrscheinlich. Die Bevorzugung der Feldrichtung kommt erst zwischen zwei Stößen, d.h. während der Relaxationszeit τ, zum Tragen. Durch den Stoß vergißt ein Ladungsträger diese Vorzugsrichtung.

Die Driftgeschwindigkeit führt bei positiven Ladungsträgern zu einer positiven Stromdichte $\vec{j} = n\,q\,\vec{v}_D = \rho_{el}\,\vec{v}_D$. Damit ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischem Feld:

$$\vec{j} \quad = \quad n\,q\,\vec{v}_D = \frac{n\,q^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma_{el}\,\vec{E} \tag{9}$$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma_{el}\,\vec{E} \qquad \text{Ohmsches Gesetz}} \tag{10}$$

Dabei ist σ_{el} die elektrische Leitfähigkeit, die eine temperatur- und materialabhängige Größe ist:

$$\sigma_{el} = \frac{n\,q^2\tau}{m} = \frac{1}{\rho_{el}}$$

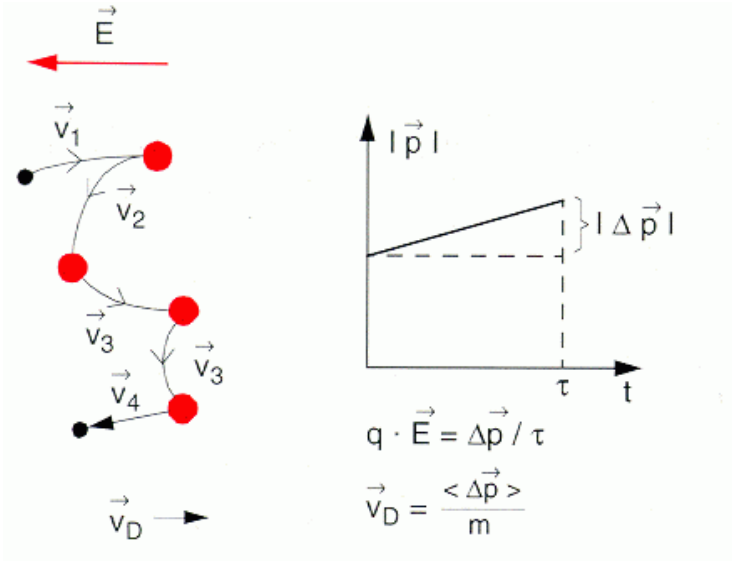


Abbildung 7: Schematischer Weg eines Elektrons, der hauptsächlich durch Stöße und nur geringfügig durch das Feld verändert wird.

Die Dimension von $\sigma = \left|\vec{j}\right| / \left|\vec{E}\right|$ ist:

$$[\sigma] = 1\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V\,m}} = \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1},$$

Einheit $\ldots\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ = "Siemens"$\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Aus der skalaren Leitfähigkeit wird in anisotropen Festkörpern ein richtungsabhängiger Leitfähigkeitstensor mit 9 Komponenten $\sigma_{xx}...\sigma_{zz}$. Je kleiner die Reibung, umso kleiner der Widerstand, bzw. umso größer die Leitfähigkeit; d.h. umso größer wird die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen.

2.1.1 Das Konzept der Beweglichkeit bei der Stromleitung:

Da die Geschwindigkeit v_D der Driftbewegung der Elektronen von der Feldstärke $\vec{E}$ abhängt, wird gerne der Begriff der Beweglichkeit μ (engl.: mobility) verwendet:

$$\vec{v}_D = \frac{q\tau}{m}\vec{E} = \mu\,\vec{E} \quad [\mu] = 1\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{V\,s}}$$

$$\mu = \frac{\vec{v}_D}{\vec{E}} = \frac{q\,\tau}{m} = \frac{\sigma}{n\,q} \tag{11}$$

Die Beweglichkeit gibt die Driftgeschwindigkeit v_D verschiedener Ladungsträger bei einer Feldstärke $E = 1\,\mathrm{V/m}$ in m/s *an.*

Es muß nochmals daran erinnert werden, daß obige Annahmen nur für den Fall kleiner Feldstärken Gültigkeit haben. In diesem Fall sind die durch die Feldstärke verursachten "Driftgeschwindigkeiten" der Ladungsträger viel kleiner als ihre mittleren Geschwindigkeiten. Auf Grund dieser Geschwindigkeitsverteilung wird es auch vorkommen, daß ohne Vorhandensein einer Feldstärke Ströme festgestellt werden, welche entsprechend der Geschwindigkeitsverteilung ihrer Richtung und Größe nach variieren bzw. fluktuieren. Diese Fluktuationen sind meßbar und geben in allen elektrischen Kreisen, vornehmlich bei der Messung kleiner Ströme, Anlaß zu Störungen, dem sog. "Rauschen".

Wird die Feldstärke größer, so ist das einfache Modell nicht mehr anwendbar; dann sind zusätzliche Prozesse zu berücksichtigen, und die Proportionalität zwischen Feldstärke und Teilchengeschwindigkeit ist nicht mehr gegeben.

Beispiele:

1) In Cu ist $\sigma_{el} = 6.\ 10^7$ A/Vm, $n = 8,4\ .10^{28}$ m^{-3}, und $q = -e = 1,6.10^{-19}$ C. Damit ist die Beweglichkeit $\mu = 0.0043\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{V/m}}$. Bei einer Feldstärke von $0.1\,\mathrm{V/m}$ ist die Stromdichte $j = 6.10^6$

A/m^2, somit fließt durch einen Cu-Leiter mit $1\,cm^2$ Querschnitt ein Strom von 600A. Die Elektronen haben dabei eine Driftgeschwindigkeit von nur 0,4 mm/s, wäherend $\overline{v}_{th} = 1,6.10^6$ m/s ist (0.5% der Lichtgeschwindigkeit). $\rightarrow v_D <<< \overline{v}_{th}$

2)In einem elektrolytischen Leiter ist die mittlere thermische Geschwindigkeit etwa 1000m/s; bei einer Ionendichte von 10^{26} m^{-3} und einer Stromdichte $j = 10^4 A/m^2$ ist $v_D = j/(n.e) = 0,6\,mm/s$. Auch hier ist $v_D << \overline{v}_{th}$. Damit ergibt sich eine Beweglichkeit von 6.10^{-8} m^2/Vs und eine um etwa acht Größenordung kleinere Leitfähigkeit $\sigma_{el} = \mu\, n\, e \sim 1A/Vm$ als in Cu.

Es zeigt sich, daß die elektrische Leitffähigkeit proportional zur *Wärmeleitfähigkeit* λ ist - **Wiedemann-Franzsches Gesetz-** das für viele Metalle eine gute Näherung ist:

$$\frac{\lambda}{\sigma_{el}} = a\,.\,T \quad \text{mit} \quad a = 3\left(\frac{k_B}{e}\right)^2. \tag{12}$$

Dies zeigt, daß in Metallen die Leitungselektronen sowohl zur elektrischen als auch zur Wärmeleitung beitragen und Metalle zu guten Wärmeleitern machen.

2.2 Das Ohmsche Gesetz

Der lineare Zusammenhang von Stromdichte und Feldstärke ist das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Bei homogenen Leitern mit dem Querschnitt A und der Länge L erhalten wir durch Integration $I = \int \vec{j}.d\vec{A}$ und $U = \int E.dL$ das Ohmsche Gesetz in integraler Form

$$I = \frac{\sigma\, A}{L} U = \frac{U}{R} \qquad [R] = [\frac{U}{I}] = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 1\,\Omega$$

Der elektrische Widerstand R eines Leiters hängt von der Leitfähigkeit σ und der Geometrie ab. Das Ohmsche Gesetz verknüpft den Strom, der durch einen (idealisiert gedachten) Leiter bei Anlegen einer bestimmten Potentialdifferenz U auftritt, mit dieser. Der Proportionalitätsfaktor, der bei "Ohmschen" Leitern von der Potentialdifferenz unabhängig konstant ist, wird **elektrischer Widerstand** genannt:

Der spezifische Widerstand $\rho_s = 1/\sigma_{el}$ eines Leiters ist auf die Längen- und Querschnittseinheit bezogen und ist eine materialspezifische von der Geometrie des Leites unabhängige Größe

$$\rho_s = R \cdot \frac{A}{L} \qquad [\rho] = \frac{\Omega\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = \Omega\,\mathrm{m} \tag{13}$$

($L \ldots$ Länge des Leiters; $A \ldots$ Querschnittsfläche).

Der spezifische Widerstand $\rho_s = R.A/L$ in Ωm gibt den Widerstand eines Materials mit einer Würfelkantenlänge von 1m an. Häufig wird ρ_s in $10^{-6}\Omega$m angegeben, dies entspricht dem Widerstand eines Drahtes mit $1mm^2$ Querschnitt und einer Länge von 1m ($1\mu\Omega m = 1\Omega mm^2/m$).

Einen Leiter bezeichnet man als "Ohmschen Leiter", wenn die die Strom- Spannungskennlinie linear ist; d.h. wenn ρ_s unabhängig von I und U ist. Der Strom I und der Spannungsabfall $U = R.I$ entlang des Leiters sind einander proportional.

Man beachte:

Entlang eines Leiters, der von I durchflossen wird, tritt ein *Spannungsabfall* (Potentialgefälle) auf (siehe Abb.8):

$$U(x) = \phi_1 - \phi(x) = R.I\frac{x}{L}$$

Der Leiter ist nicht mehr auf konstantem Potential wie in der Elektrostatik; seine Oberfläche ist nicht mehr Äquipotentialfläche.

Der elektrische Widerstand ist auch für Leiter mit komplizierter Geometrie definiert als $R = U/I$, wobei die Spannung an den stromführenden Elektroden und der Gesamtstrom gemessen werden. R kann nicht immer aus ρ_s und der Leitergeometrie berechnet werden, sondern man ist bei komplizierter Geometrie auf Messungen angewiesen.

Nicht alle Leiter gehorchen dem Ohmschen Gesetz. Bei höheren Feldstärken ist ρ nicht mehr unabhängig von E. Beim Ohmschen Widerstand ist die Strom-Spannungs-Kennlinie linear; treten Abweichungen auf, so ist die Stromstärke nicht mehr proportional zur angelegten Spannung. Derartige Effekte finden wir sehr häufig, und sie spielen auch eine große Rolle, z.B. bei Gasentladungen, Halbleitern etc. (s. später !).

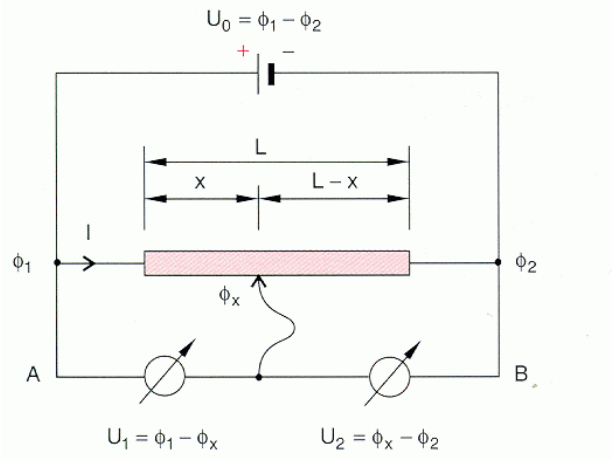


Abbildung 8: Entlang eines stromdurchflossenen Leiters ist das Potential nicht konstant →Spannungsteiler.

2.3 Beispiele für Anwendungen des Ohmschen Gesetzes

2.3.1 Kontinuierlicher Spannungsteiler

Man kann den gleichmäßigen Spannungsabfall eines stromdurchflossenen Leiters ausnützen, um bei fester Quellenspannung U_0 eine variable Spannung $U < U_0$ zu erzeugen (Abb. 8). Durch den variablen Spannungsabgriff am Leiter erhält man die variablen Spannungen

$$U_1(x) = \frac{x}{L}U_0 \quad \text{bzw.} \quad U_2(x) = \frac{x-L}{L}U_0$$

2.3.2 Aufladung eines Kondensators

Ein Kondensator mit der Kapazität C wird durch eine Spannungsquelle U_0 über einen Widerstand R aufgeladen (Abb. 9). Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter S_1 geschlossen. Die Spannung am Kondensator ist $U(t = 0) = U(0) = 0$. Für den Ladestrom gilt:

$$I(t) = \frac{U_0 - U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q(t)}{RC}$$

Durch Differentiation ergibt sich mit $I(t) = dQ/dt$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}I(t) \quad \rightarrow \frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{1}{RC}dt$$

Lösung der Differentialgleichung für den zeitlich variablen Strom durch Integration mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$:

$$lnI(t) = -\frac{t}{RC} + konst. \quad \rightarrow lnI(0) = konst.$$

$$lnI(t) - lnI_0 = ln\frac{I(t)}{I_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$I(t) = I_0\, e^{-t/(RC)}$$

Für die Spannung am Kondensator erhält man aus $I(t).R = U_0 - U(t)$

$$U(t) = U_0(1 - e^{-t/(RC)})$$

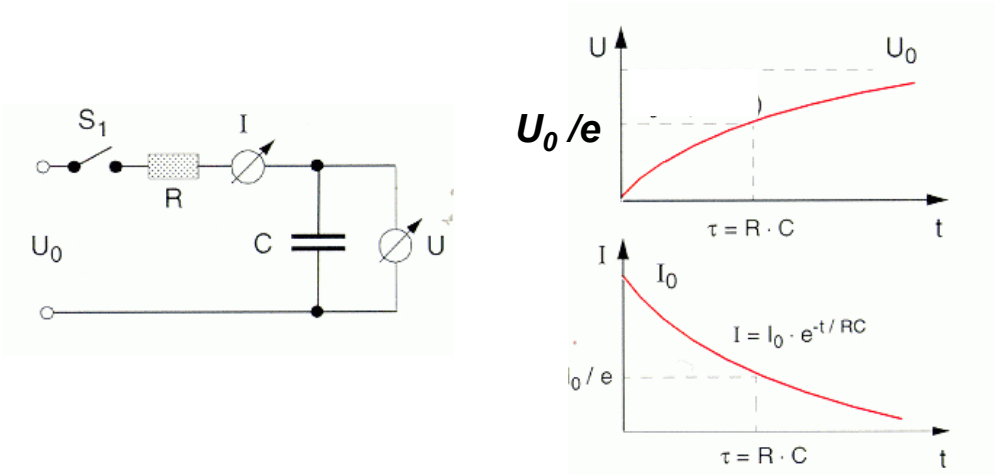


Abbildung 9: Strom- und Spannungsverlauf bei der Kondensatoraufladung

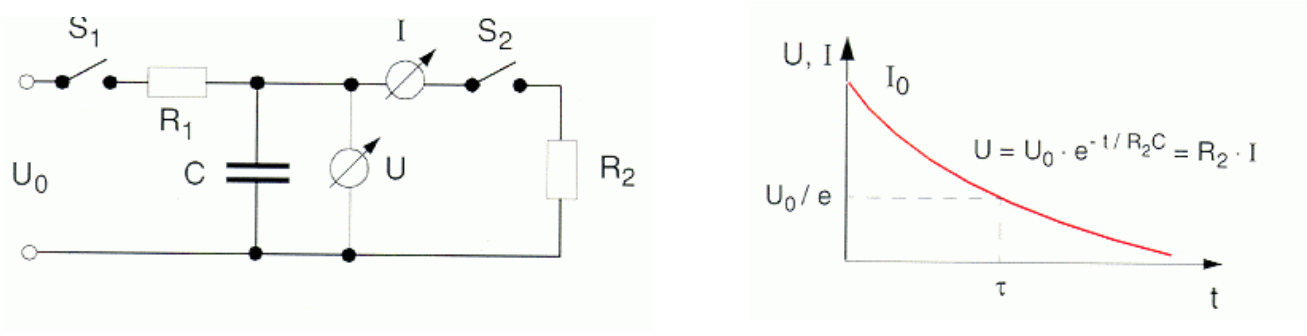


Abbildung 10: Strom- und Spannungsverlauf bei der Kondensatorentladung

Kondensatorentladung Liegt am Kondensator bei $t = 0$ die Spannung U_0 und wird der Schalter S_2 bei offenem Schalter S_1 geschlossen (Abb. 10), so fließt durch den Entladewiderstand R_2 der Strom

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dU}{dt} = \frac{U(t)}{R_2}$$

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{R_2 C} \quad \rightarrow \text{ Integration}$$

$$U(t) = U_0 e^{-t/(R_2 C)} \quad \text{und} \quad I(t) = \frac{U_0}{R_2}\, e^{-t/(R_2 C)} = I_0\, e^{-t/(R_2 C)}$$

Die Zeitkonstante $\tau = RC$ definiert die Zeit, nach der der Entladungsstrom auf den e-ten Teil (0,367 $\approx 37\%$) abgefallen ist. Wir sehen die Dimension von τ durch die Betrachtung im SI-System:

$$1\ \Omega = \frac{1\ \mathrm{V}}{1\ \mathrm{A}} = \frac{1\ \mathrm{V} \cdot 1\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{C}}; \qquad 1\ \mathrm{F} = \frac{1\ \mathrm{C}}{1\ \mathrm{V}}; \qquad 1\,\Omega \cdot 1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{s}\ .$$

In elektrischen Stromkreisen treten stets Entladungen der Kapazitäten durch Ohm'sche Widerstände (und seien diese auch sehr groß, z.B. Isolationswiderstände) auf. Die Zeitkonstanten ergeben sich aus den obigen Überlegungen. Umgekehrt machen sich bei sehr schnell wechselnden elektrischen Vorgängen auch bei rein Ohmschen Widerstandskombinationen die ungewollten Kapazitäten bemerkbar und führen zu unerwünschten Relaxationserscheinungen.

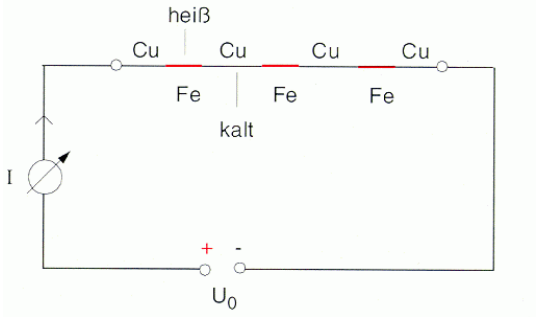


Abbildung 11: Unterschiedliche Joulsche Wärmeleistung in Cu und Fe (unabhängig von dem später behandelten Peltier-Effekt).

2.4 Stromleistung und Joulesche Wärme

Nach dem Modell für den Ohmschen Widerstand haben wir gesehen, daß sich den beweglichen Ladungsträgern Widerstände in den Weg stellen. Um die Ladung q vom Ort mit dem Potential ϕ_1 zu einem Punkt mit dem Potential ϕ_2 zu bringen, wird die Arbeit W aufgewendet bzw. gewonnen:

$$W = q(\phi_1 - \phi_2) = qU$$

Bei zeitlich konstanter Spannung U liefert eine Ladungsmenge Q, die pro Sekunde durch den Leiter fließt, die **elektrische Leistung** P :

$$P = \frac{dW}{dt} = U\frac{dQ}{dt} = U\,I = I^2\,R = \frac{U^2}{R}$$

Einheit von P im SI-System: 1 W $\hat{=}$ 1 V·1 A (Watt).

Die vom Strom während der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ geleistete Arbeit ist

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U\,I\,dt = U\,I\,\Delta t,$$

falls U und I zeitlich konstant sind. Diese elektrische Energie wird durch die der Kraft $q\vec{E}$ entgegengesetzte gleich große Reibungskraft $\vec{F}_R = -k_R\,\vec{v}_D$ in Wärme umgewandelt. Die sogenannte Joulesche Wärme beträgt: $P\,t = I^2\,R\,t$.

Bei *konstantem Strom* (Stromquelle) wird - wegen $P = I^2R$ - an den Stellen des Leitungsnetzwerkes mit größtem R die größte Leistung verbraucht (siehe Abb. 11), während bei *konstanter Spannung* (Spannungsquelle) wegen $P = U^2/R$ die Leistung mit *sinkendem* Widerstand ansteigt!

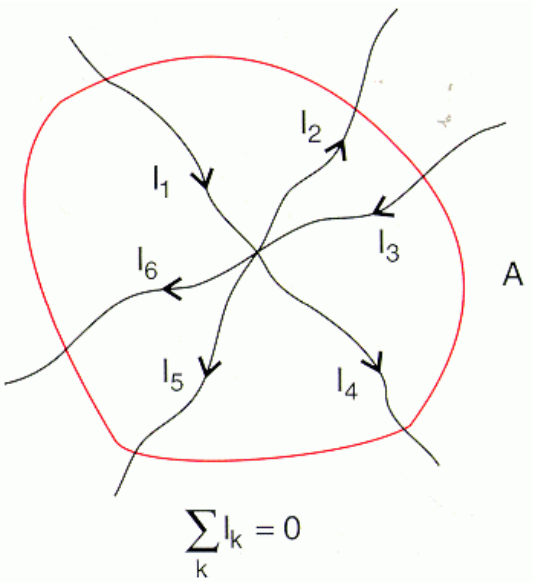
3 Kirchhoffsche Regeln, Elektrische Stromkreise

In elektrischen Schaltungen hat man ein Netzwerk von vielen Leitern, die in sogenannten Knoten zusammenlaufen und Maschen bilden. Zur Berechnung der einzelnen Leiterströme, Spannungen und des Gesamtwiderstandes sind folgende Regeln nützlich:

Um eine Netzmasche aufzulösen, verwenden wir folgende Zusammenhänge:

1. Das Ohm'sche Gesetz $R.I = U$
2. Das 1. Kirchhoffsche Gesetz, $\sum I = 0$ für jeden Stromknoten (Knotenregel);
3. Das 2. Kirchhoffsche Gesetz, $\sum U = 0$ für jede Netzmasche (Maschenregel).

Gibt es Spannungsquellen U_k innerhalb der Maschen, gilt das 2. Kirchhoffsche Gesetz in folgender Form:



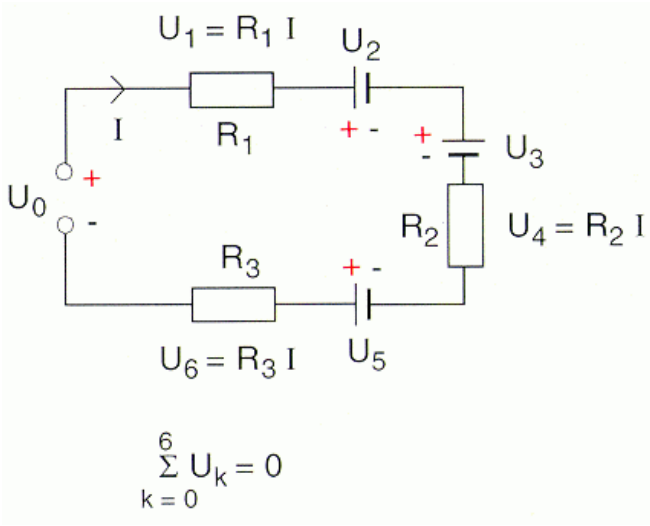


Abbildung 12: Knotenregel (a), Maschenregel (b).

$$\sum_k U_k = \sum_i I_i \, R_i \quad , \tag{14}$$

Summe der eingespeisten Spannungen = Summe der Spannungsabfälle.

Die Kirchhoffschen Gesetze basieren auf zwei fundamentalen Aussagen der Elektrostatik bzw. über stationäre Ströme und gelten auch nur unter diesen Vorraussetzungen

$$\oint \vec{E} d\vec{s} \;\; = \;\; 0 \quad \text{Wirbelfreiheit des Feldes}$$

$$\oint \vec{j} . d\vec{A} \;\; = \;\; 0 \quad \text{Quellenfreiheit des stationären Stromes}$$

Das **1. Kirchhoffsche Gesetz** folgt direkt aus der Kontinuitätsgleichung, da in einem Knoten P (Abb. 12), in dem sich mehrere Leiter verzweigen, weder Ladung erzeugt noch vernichtet werden kann. Da für stationäre Ströme $div\vec{j} = 0$ gilt:

$$\int_V div\, \vec{j} \, . dV = \oint_{A(V)} \vec{j} \, . \, d\vec{A} = \sum_k I_k = 0$$

Die Summe der einlaufenden Ströme muß gleich der Summe der auslaufenden Ströme sein.

Das **2.Kirchhoffsche Gesetz** ist eine Folge des konservativen elektrischen Feldes: Das Linienintegral über einen geschlossenen Weg C (Netzmasche) verschwindet $\oint_C \vec{E} \, . \, d\vec{s} = 0$. Daher muß die Summe aller Potentialdifferenzen oder Spannungen im elektrischen Kreis (Netzmasche) gleich Null sein. Gibt es Spannungsquellen innerhalb der Maschen, dann ist die Summe der eingespeisten Spannungen U_k gleich der Summe der Spannungsabfälle:

$$\sum_k U_k = \sum_i I_i . R_i$$

Für Abb. 12b gilt bei einem Umlauf im Uhrzeigersinn (Eingespeiste Spannungen zählen positiv, wenn sie Strom in positiver Richtung (von + nach -) hervorrufen):

$$U_0 - U_2 - U_3 + U_5 = I \, . R_1 + I \, . R_2 + I \, . R_3$$

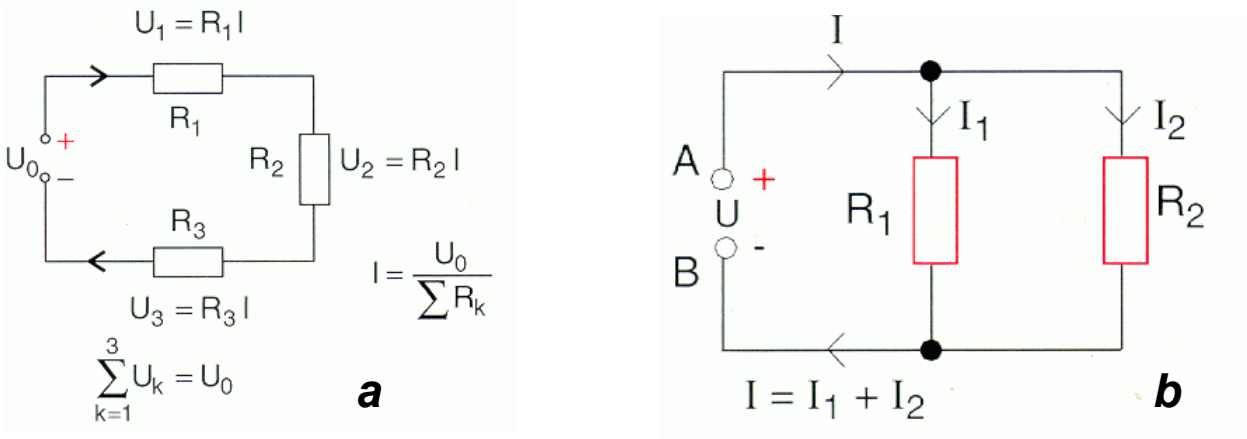


Abbildung 13: Serienschaltung (a) und Parallelschaltung von Widerständen

3.1 Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen

Der Strom I fließt durch mehrere Widerstände R_k (Abb.13a), daher ist

$$U_0 = \sum_k U_k = \sum_k I.R_k = I\,.\,R_{ges} \quad \rightarrow R_{ges} = \sum_k R_k$$

Bei der Serienschaltung addieren sich die Einzelwiderstände.

Bei Parallelschaltung von Widerständen liegt dieselbe Spannung U_0 (zwischen den Punkten A und B in Abb. 13b) an den parallelgeschalteten Widerständen, daher ist:

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{R_{ges}} &= I = I_1 + I_2 = \frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} \\ \frac{1}{R_{ges}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{allgemein: } \frac{1}{R_{ges}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \end{aligned}$$

Bei Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte; der Gesamtwiderstand $R = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}$ ist kleiner als der kleinste Wert der Einzelwiderstände.

3.2 Spannungsteiler

Aus den Kirchhoffschen Regeln ergeben sich die Beziehungen (Abb.14a)

$$\begin{aligned} I_0 &= I_R + I_U \\ U_0 &= I_0 R_T + I_R R \\ I_R R - I_U R_U &= 0 \end{aligned}$$

Wenn $I_U \rightarrow 0$ hat man einen unbelasteten Spannungsteiler ($I_0 = I_R$):

$$U = \frac{R}{R_T + R} U_0$$

Sonst mißt man mit dem Voltmeter eine kleinere Spannung $U - I_U R_U$, wobei R_U der Innenwiderstand des Voltmeters ist. $\Rightarrow$ Voltmeter sollten möglich hochohmig sein!

3.3 Wheatstonesche Brückenschaltung

Zur genauen Bestimmung von Widerständen wird die Brückenschaltung Abb. 14b verwendet: R_1, R_2, R_3 sind bekannte Widerstände, R_x ist unbekannt. Zwischen den Punkten A und B wird die

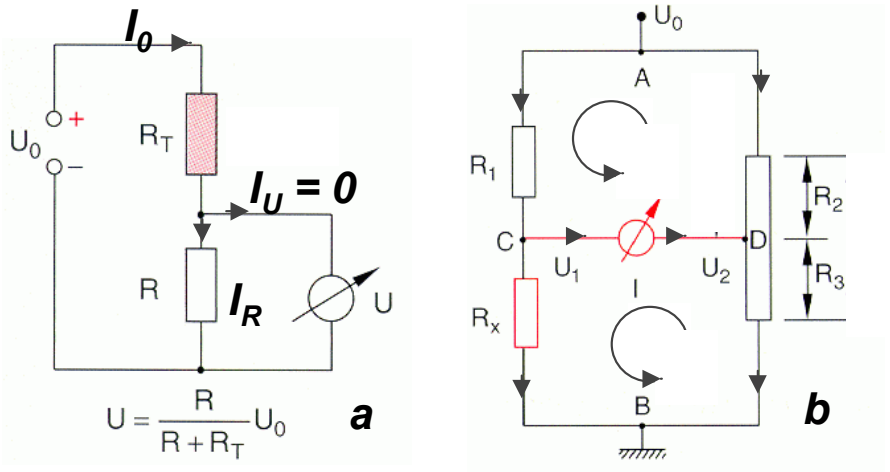


Abbildung 14: Spannungsteiler (a), Wheatstonesche Brückenschaltung (b).

Spannung U_0 eingespeist und der Schleifer D solange verschoben, bis kein Strom durch das Amperemeter fließt (Nulldetektor). Die Punkte C und D haben dann gleiches Potential. Für die Spannung U_1 zwischen C und B bzw. U_2 zwischen D und B gilt dann $U_1 = U_2$. Jeder Zweig kann als Spannungteiler aufgefaßt werden:

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{R_x}{R_1 + R_x} \quad und \quad \frac{U_2}{U_0} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$U_1 = U_2 \quad \rightarrow R_x.R_2 = R_3 R_1 \rightarrow R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

Da der Nullabgleich sehr empfindlich ist, werden Brückenschaltungen auch zur Bestimmung von Induktivitäten und Kapazitäten verwendet →Wechselstrombrücken.

Allgemein kann obige Beziehung mit Knoten- und Maschenregel abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} I_{AC} &= I_{CD} + I_{CB} \\ I_{CD} + I_{AB} &= I_{DB} \\ I_{AC}R_1 + I_{CD}R_I + I_{DA}R_2 &= 0 \\ I_{DC}R_I + I_{CB}R_x + I_{BD}R_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } I_{CD} &= 0 \text{ gilt: } I_{AC} = I_{CB},\ I_{AD} = I_{DB} = -I_{BD} \\ I_{CB}R_1 &= -I_{BD}R_2 \\ I_{CB}R_x &= -I_{BD}R_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_x}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} \end{aligned}$$

4 Elektrischer Strom im Festkörper

4.1 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Lange bevor eine genauere Theorie des Festkörpers vorlag, hatte Paul Drude um 1900 das oben erwähnte Modell für die metallische Leitfähigkeit durch die Annahme eines idealen Elektronengases in Metallen entwickelt. Die quantenmechanische Behandlung dieses Problems liefert formal die gleichen Beziehungen für die Beweglichkeit und die Leitfähigkeit $\sigma = (e^2 n\,\tau)/m$ wie das Drude Modell, nur wird die Masse der Elektronen durch eine effektive Masse eresetzt und die Relaxationszeit hat nur Bedeutung für Elektronen an der Femienergie.

Wenn Elektronen mit den schwingenden Gitteratomen des Kristalles zusammenstoßen, nimmt nicht ein einzelnes Atom den Impuls und die Stoßenergie auf, sondern das gesamte Kristallgitter, da jedes

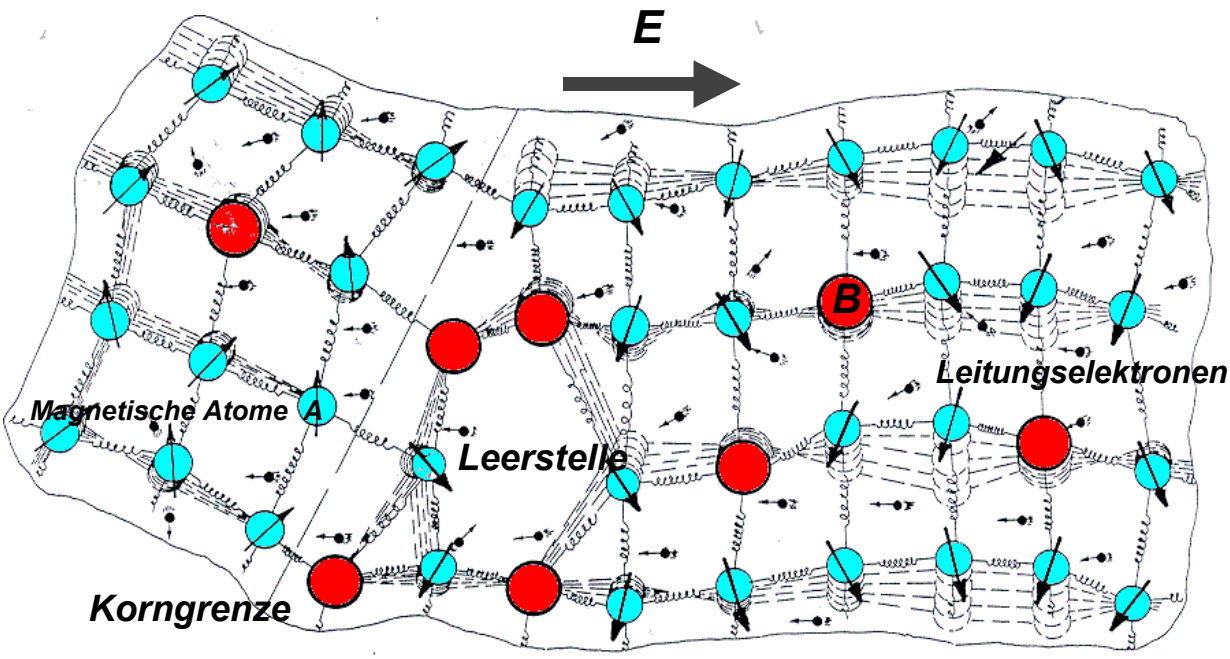


Abbildung 15: Schematische Darstellung eines Metalles mit magnetischen Atomen A, Verunreigungsatomen B, Leitungselektronen und Gitterschwingungen.

Atom durch elastische Kräfte an seine Nachbaratome gebunden ist (siehe Abb. 15). Durch die thermische Energie werden im Kristall Gitterschwingungen angeregt, die stehende Wellen bilden und Phononen genannt werden. Die Streuung der Elektronen an diesen Phononen verursacht vorwiegend den temperaturabhängigen Widerstand ρ_{Ph} der Metalle. Bei tiefen Temperaturen sind diese Gitterschwingungen eingefroren und Stöße treten nur mehr an Kristalldefekten und Fremdatomen auf. Dieser Beitrag zum Widerstand ist temperaturunabhängig und wird als spezifischer Restwiderstand ρ_0 bezeichnet, da dies der Anteil ist, der bis zu tieftsten Temperaturen als Rest überbleibt. Abgesehen von der Streuung der Elektronen an Atomen mit magnetischem Moment (wie die Atome A in Abb. 15) und der Elektron-Elektron-Streuung, wird die freie Weglänge Λ und damit die elektrische Leitfähigkeit $\sigma_{el} = 1/\rho_s$ umso größer, je reiner das Metall ist.

Der spezifische elektrische Widerstand eines Metalles setzt sich somit aus den Einzelbeiträgen zusammen:

$$\rho_s = \rho_0 + \rho_{Ph} + \rho_e + \rho_m$$

Dabei liefert die Elektron-Elektron-Streuung ρ_e eine quadratische Temperaturabhängigkeit bei tiefen Temperaturen ($T < 40\,\mathrm{K}$), und der magnetische Beitrag ρ_m steigt von tiefen Temperaturen bis zur Ordnungstemperatur (Curietemperatur T_C) an und ist oberhalb T_C temperaturunabhängig. Die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes einfacher Metalle (z.B. Na, Al) wird von $\rho_{Ph}(T)$ dominiert, der bei tiefen Temperaturen proportinal T^5 ist und mit steigender Temperatur proportional zu T wird. Mit zunehmender Temperatur steigt die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen. Außerdem wird ihre freie Weglänge kürzer, da mehr Gitterschwingungen thermisch angeregt werden, wodurch die Zahl der Stöße steigt. Beide Effekte erhöhen den spezifischen Widerstand. Diese Temperaturabhängigkeit ist für einfache Metalle gut erfüllt, siehe Abb. 17a, wo der reduzierte Widerstand als Funktion der reduzierten Temperatur T/Θ aufgetragen ist. Die Debye-Temperatur Θ ist ein Maß für die "Federkräfte" zwischen den Atomen und somit ein Maß für die Stärke der Gitterschwingungen bei einer bestimmten Temperatur T. Allgemein läßt sich der spezifische Widerstand in einem weiten Temperaturbereich ($70\,\mathrm{K} < T < 500\,\mathrm{K}$) für viele Metalle *vereinfacht* mit

$$\rho_s = \rho_0(1 + \alpha T + \beta T^2) \tag{15}$$

beschreiben. Der Temperaturkoeffizient α gibt die Änderung des spezifischen elektrischen Widerstandes

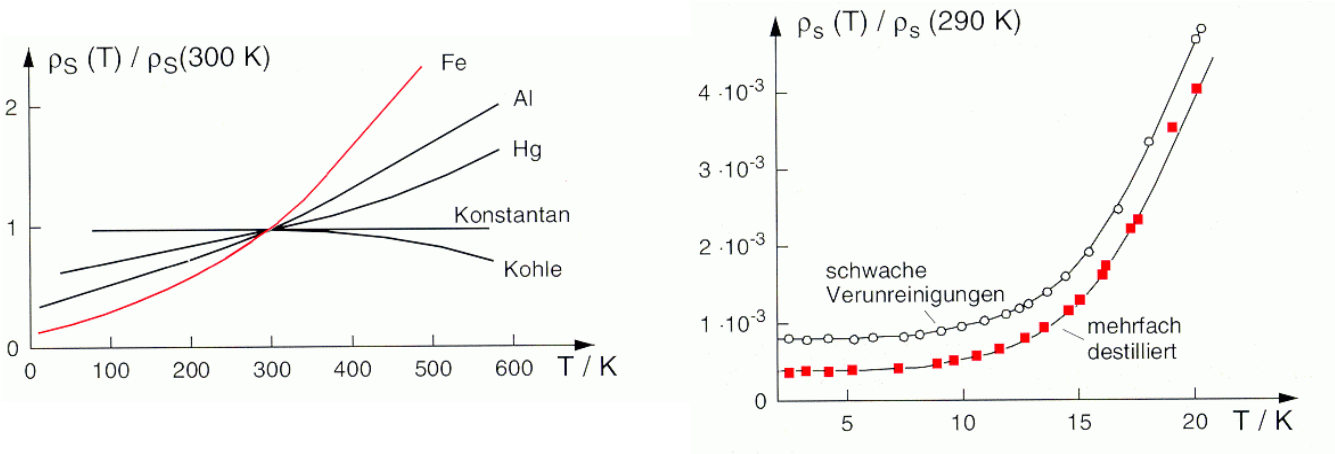


Abbildung 16: Temperaturabhängigkeit des normierten spezifischen Widerstandes einiger Metalle (a), Widerstand von Natrium bei tiefen Temperaturen für verschiedene Reinheitsgrade (b).

mit der Temperatur (Einheit: K^{-1}) an. Dabei ist αT der dominante Term (für $T > 50\,K$), während βT wesentlich kleiner als α ist. In der Tabelle sind ρ_0 und α für einige Metalle angegeben ($100\,K < T < 500\,K$).

Metall	$\rho_0/10^{-6}\Omega m$	α/K^{-1}
Silber	0,015	4.10^{-3}
Kupfer	0,016	4.10^{-3}
Aluminium	0,026	$4{,}7.10^{-3}$
Konstantan $Ni_{0.4}Cu_{0.5}Zn_{0.1}$	0,5	$< 10^{-4}$
Eisen	0,087	$6{,}6.10^{-3}$
Mangan	7,1	$0{,}17.10^{-3}$
Wolfram	0,05	$4{,}8.10^{-3}$

Die Abhängigkeit von der Temperatur ist für unterschiedliche Metalle sehr verschieden. Einzelne Legierungen zeichnen sich durch einen besonders kleinen Temperaturkoeffizienten aus, z.B. Konstantan.Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes wird zur Temperaturmessung angewandt; z.B. Platinthermometer. Abb. 16 zeigt die Änderung des elektrischen Widerstandes verschiedener Leiter mit der Temperatur.

Aus Abb. 17 können wir überdies sehen, daß für gewisse Metalle (z.B. reines Hg) bei tiefen Temperaturen der Widerstand sprunghaft verschwindet; es ist dies der bekannte und später zu behandelnde Effekt der **Supraleitung**.Die zeitliche Entwicklung der Sprungtemperaturen und einige Widerstandskurven von Hochtemperatursupraleitern, sowie deren Sprungtemperaturen sind in Abb.18 dargestellt und in Tabelle 19 zusammengefaßt.

4.2 Elektrizitätsleitung in Metallen

Das Leitfähigkeitsmodell nach Drude basiert auf der Annahme des freien Elektronengases, in dem sich freie Elektronen durch das Kristallgitter bewegen. Jedes Atom des Metalls steuert ein oder zwei Leitungselektronen zum *"Elektronengas"* bei. Die Dichte dieses Elektronengases ist demnach etwa gleich der Dichte der Atome im Festkörper (rund $10^{28}\,m^{-3}$).

Wenden wir unser Modell weiter an, so sehen wir (wir betrachten nun nur mehr Elektronen als Ladungsträger), daß die Zeiten τ, nach denen die Information über den ursprünglichen Bewegungszustand der Elektronen verloren gegangen ist, aus der Leitfähigkeit und der Elektronenmasse berechnet werden können: Für Natrium, welches eine Elektronendichte von etwa $2.5 \cdot 10^{28}\,m^{-3}$ und eine Leitfähigkeit von

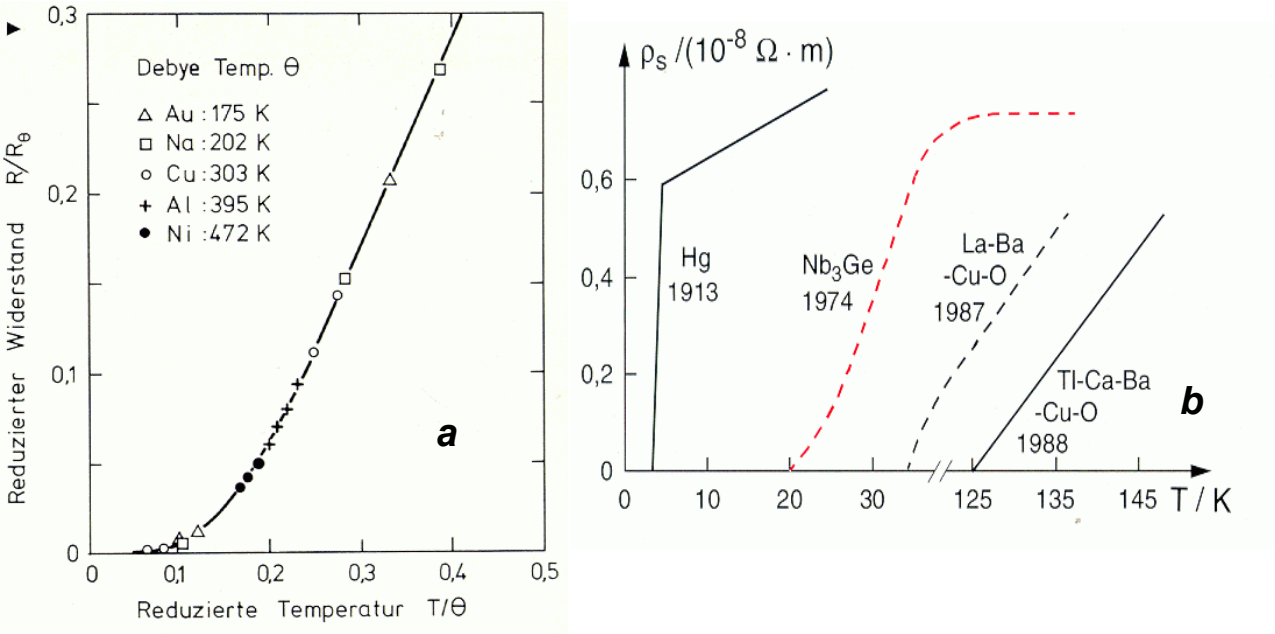


Abbildung 17: Der normierte Widerstand (normiert auf den Widerstand bei der Debye-Temperatur θ) als Funktion der reduzierten Temperatur T/θ von verschiedenen einfache Metalle skaliert (a), verschiedene Supraleiter (b).

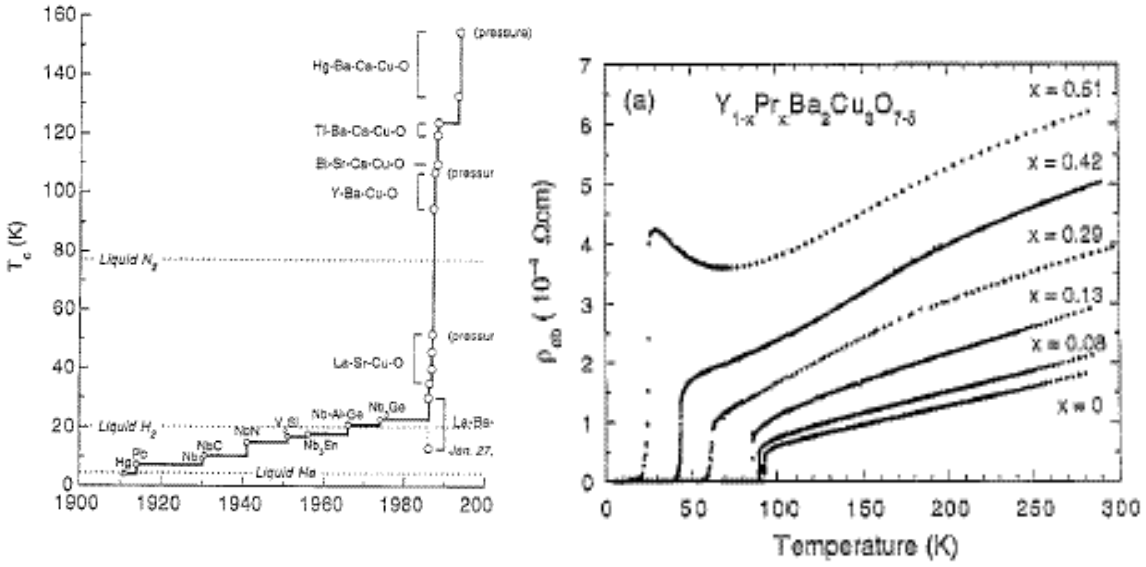


Abbildung 18: Zeitliche Entwicklung der supraleitenden Sprungtemperaturen (a), Widerstandskurven von Hochtemperatursupraleitern (b).

(a)

Material	Max. T_c (K)
$La_{2-x}M_xCuO_4$; M = Ba, Sr, Ca, Na	~ 40
$Ln_{2-x}M_xCuO_{4-y}$; Ln = Pr, Nd, Sm, Eu; M = Ce, Th	~ 25
$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$	92
$LnBa_2Cu_3O_{7-\delta}$	~ 95
Ce, Tb do not form phase	
Pr forms phase; neither metallic nor SC'ing	
$RBa_2Cu_4O_8$	~ 80
$Bi_2Sr_2Ca_{n-1}Cu_nO_{2n+4}$ (n = 1, 2, 3, 4)	(n = 3) 110
$TlBa_2Ca_{n-1}Cu_nO_{2n+3}$ (n = 1, 2, 3, 4)	(n = 4) 122
$Tl_2Ba_2Ca_{n-1}Cu_nO_{2n+4}$ (n = 1, 2, 3, 4)	(n = 3) 122
$HgBa_2Ca_{n-1}Cu_nO_{2n+2}$ (n = 1, 2, 3, 4)	(n = 3) 133

(b)

Material	Nickname	T_c (K)
$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$	YBCO; YBCO–123;Y–123	92
$Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$	BSCCO; BSCCO–2223; Bi–2223	110
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	TBCCO; TBCCO–2223; Tl–2223	122
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	HBCCO; HBCCO–1223; Hg–1223	133
$La_{1.85}Sr_{0.15}CuO_4$	LSCO	40
$Nd_{1.85}Ce_{0.15}CuO_{4-y}$	NCCO	25

Abbildung 19: Zusammensetzung und Sprungtemperaturen von Hochtemperatursupraleiter

etwa $2.2 \cdot 10^7\,(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$ hat, ergibt sich demnach:

$$\tau = \frac{\sigma \cdot m_e}{ne^2} = \frac{2.2 \cdot 10^7 \cdot 9 \cdot 10^{-31}}{2.5 \cdot 10^{28} \cdot 2.3 \cdot 10^{-38}} \doteq 3 \cdot 10^{-14}\mathrm{s} \quad .$$

Aus der Thermodynamik kann man sehen, daß Elektronen bei Zimmertemperatur Energien haben müssen, welche Geschwindigkeiten von $10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ entsprechen; es zeigt sich, daß diese Elektronen also nach unserem Modell während der Stoßzeit τ etwa 3 nm weit fliegen, bis sie den nächsten Stoß erleiden. Dies sind ca. 10 Gitterabstände, und es erscheint seltsam, daß Elektronen so weit fliegen können, ohne zu stoßen. Man gelangt also zu einer Frage, die mit den klassischen Theorien nicht gelöst werden konnte; es ist dieser Sachverhalt nur mit der Wellennatur der Elektronen befriedigend aufzuklären. ⇒ Quantenphysik.

Das Ohmsche Verhalten der Metalle ist bis zu sehr hohen Stromdichten nachweisbar. Aus der heute gültigen Theorie kann vorhergesagt werden, daß etwa 1% Abweichung vom Ohmschen Verhalten erst bei Stromdichten in der Größenordnung von $10^{13}\ \mathrm{A \cdot m^{-2}}$ zu erwarten ist.

4.3 Bändermodell der elektrischen Leitung

Wir müssen nun für das Weitere ein vereinfachtes Modell eines Leiters oder allgemeiner eines Festkörpers entwickeln, das bereits auf quantenmechanischen Grundlagen beruht. Obwohl die dazu erforderlichen Kenntnisse erst später zur Verfügung stehen werden, ist es schon hier erforderlich, einiges davon vorwegzunehmen, damit die erläuterten Effekte bei Festkörpern nicht nur rein phänomenologisch behandelt werden können.

Wenn wir ein einzelnes Atom vor uns haben, so können wir uns vorstellen, daß die Elektronen der Atomhülle verschiedene potentielle Energien haben, d.h., es wird für verschiedene Elektronen unterschiedliche Energie aufgebracht werden müssen, um sie aus dem Atom abzulösen. Wir können für ein einzelnes Atom die Energie der einzelnen Elektronen in einem "Niveauschema" (Abb. 20) verdeutlichen. Die potentielle Energie eines Teilchens in einem System ist jene Energie, die der Arbeit entspricht, um das Teilchen aus dem Unendlichen an seinen jeweiligen Ort im Atom zu bringen. Demnach ist also die potentielle Energie der Elektronen im Atom negativ und die Energieterme der inneren Elektronen werden (aufgrund geringerer potentieller Energie) tiefer gezeichnet als die äußeren Elektronen. Bei dem

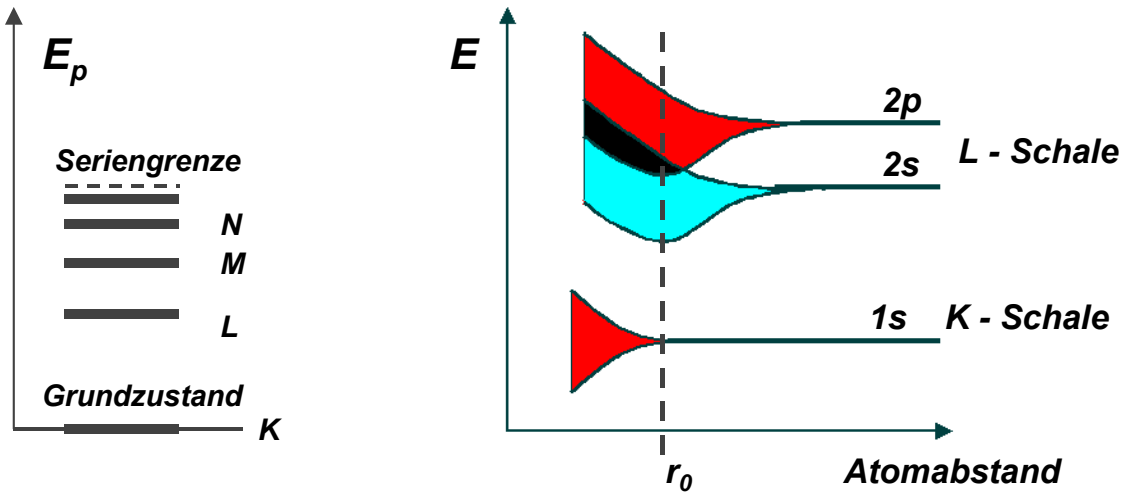


Abbildung 20: Energieniveaus im Atom (a), Aufspaltung der Energieniveaus bei Annäherung der Atome im Kristall (b); r_0 Gleichgewichtsabstand.

Niveauschema wird der Enegienullpunkt in den tiefsten Zustand (Grundzustand) gelegt. Dabei gelten verschiedene Regeln für die Struktur dieser Energieterme; für uns ist hier nur das **Pauliprinzip** wesentlich, welches besagt, daß zwei identische Elektronen in einem System, wie es unser Atom darstellt, nicht dieselbe Energie haben können, was gleichbedeutend damit ist, daß jedem Elektron der Atomhülle ein eigenes diskretes Energieniveau zukommt. Um ein Elektron in einen anderen Energiezustand zu versetzen, muß es also - anschaulich - von einem Energieniveau auf ein anderes gehoben werden, was Zufuhr von Energie erfordert.

Wenn nun mehrere Atome zu einem Molekül, bzw. Festkörper zusammentreten, ergibt sich aus dem Pauliprinzip, das nun auf alle Elektronen des Festkörpers anzuwenden ist, daß allen Elektronen dieses Moleküls bzw. des Festkörpers eigene Niveaus zukommen. Da die Molekülbindung durch die äußersten Elektronen bewirkt wird, spalten deren Niveaus stärker auf als die Niveaus der inneren Elektronen, oder anders gesagt: Die Energielagen der inneren Elektronen ändern sich kaum und behalten praktisch die Werte wie beim Einzelatom; sie werden nur leicht gegeneinander verschoben. Demgegenüber werden die Energielagen der äußeren Elektronen stark aufgefächert. Außerdem kann man nur mehr jene Elektronen, welche nicht die Bindung bewirken, eindeutig ihrem 'Stammatom' zuordnen, während die Bindungselektronen dem gesamten Molekül, bzw. Festkörper zugeordnet werden.

Treten nun sehr viele gleiche Atome oder Moleküle zu einem Kristallverband zusammen, so gilt das Pauliprinzip nun für die Elektronen des ganzen Kristalls: Die jeweils entsprechenden Elektronen aller Atome haben leicht unterschiedliche Energieniveaus, was man durch sog. **Energiebänder** veranschaulichen kann, d.h. ein Energieband enthält die Energieniveaus aller aufgefächerten Zustände "gleich berechtigter" Elektronen. Da wiederum die Außenelektronen, welche für die Kristallbildung verantwortlich sind, die am meisten aufgespalteten Energiezustände haben, ergeben sich für diese die breitesten Energiebänder. Die Energiezustände der inneren Elektronen liegen in sehr schmalen Energiebändern und sind daher praktisch "scharf"; sie können wiederum ihrem jeweiligen Atom eindeutig zugeordnet werden, während die äußeren Elektronen dem ganzen Kristall zukommen.

Wir können nun diesen Sachverhalt für einen Kristall veranschaulichen (siehe Abb. 21), indem wir die anziehende Wirkung der positiven Atomkerne auf die Elektronen der Hülle durch Potentialmulden darstellen, in denen die Elektronen gefangen sind - sie können nur durch Zuführung von Energie aus ihrer jeweiligen Potentialmulde herausgehoben werden; die äußersten Elektronen liegen aber nicht mehr in den Potentialmulden, sondern können sich frei durch den ganzen Kristall bewegen. So bewirkt der Mechanismus der Kristallbindung, daß die einzelnen Elektronen in den obersten Bändern nicht mehr an die einzelnen Atome, sondern an den Kristall als Ganzes gebunden sind. Um Elektronen aus diesen obersten Bändern aus dem Kristall zu entfernen, muß ihnen Energie zugeführt werden. Man nennt die dazu erforderliche Energie **Austrittsarbeit**, und ihre Größe ist für den jeweiligen Kristall und seine Oberflächenbeschaffenheit charakteristisch. Je nach Art des Kristalls, ob er ein Leiter, Halbleiter oder

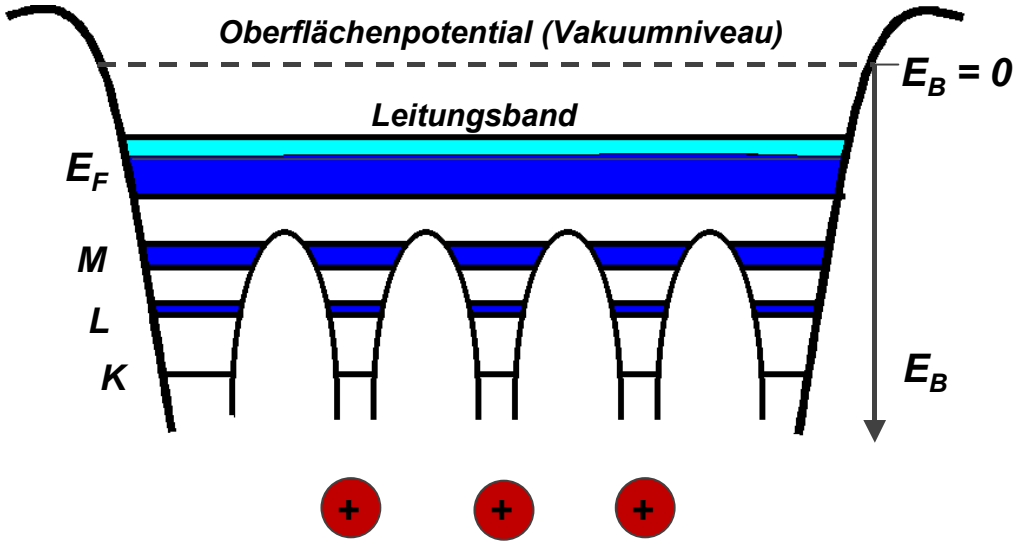


Abbildung 21: Schematisches Bändermodell eines Metalles, E_BBindungsenergie, die Femienergie E_F gibt die höchsten besetzen Energiezustäde der Elektronen an.

Isolator ist, sind die Energiebänder mit Elektronen ganz, teilweise oder gar nicht besetzt; wir wollen die wesentlichen Fälle an Hand von Abb. 22 besprechen. (Die Energiebänder charakterisieren nicht nur tatsächlich besetzte, sondern auch **mögliche** Energiezustände).

Ganz links sehen wir das typische Schema eines Einelektronenmetalls, d.i. ein Metall, bei dem die Atome in ihrer äußersten Schale nur ein Elektron haben (Alkalimetalle). Das oberste **voll besetzte** Energieband eines Kristalles enthält entsprechend unserer früheren Erklärung die Energiezustände der Valenzelektronen und heißt demnach **Valenzband**. Das höchste teilweise besetze Band heißt **Leitfähigkeitsband**, weil es jene Elektronen enthält, die sich frei durch den ganzen Kristall bewegen und am wenigsten durch die Atomrümpfe des Kristalls gehindert werden. Die **Fermienergie** E_F ist jene obere Grenze, bis zu der die elektronischen Energiezustände mit Elektronen besetzt sind. Elektronen, welche durch Verschiebung über den Kristall zur Leitung beitragen, müssen sich demnach in Energiezuständen im Leitfähigkeitsband befinden. Das Leitungsband darf nicht voll besetzt sein, da sonst keine anderen Energiezustände für die Elektronen mehr möglich wären; Leitungselektronen müssen aber aus dem elektrischen Feld Energie aufnehmen können, um im Kristall beweglich zu sein. Im Fall des Einelektronenmetalls ist es aber so, daß das oberste besetzte Band nur halb voll ist (wegen der zwei Spineinstellungen), womit Leitung möglich ist. Daneben sehen wir das Bänderschema des Zweielektronenmetalls; hier ist das Valenzband zwar gefüllt, aber es überlappt teilweise mit dem Leitfähigkeitsband. Die Elektronen können auch hier zur Leitung beitragen und derartige Metalle sind ebenfalls gute Leiter. Daneben sehen wir einen Kristall, bei dem das Valenzband voll besetzt und das Leitfähigkeitsband vollkommen leer sind; beide Bänder sind voneinander durch eine Zone, in der keine Elektronenenergiezustände möglich sind (Energielücke; engl.: gap) getrennt; hier ist keine Leitung möglich. Je nachdem, ob die Energielücke schmal oder breit ist, spricht man von einem **Eigenhalbleiter** oder einem **Isolator**. Wir werden später diese Energiebandstruktur noch ausführlich diskutieren.

4.3.1 Austrittsarbeit, Kontakt- oder Berührungsspannung

Wir haben in unserem Kristallenergieniveauschema von Abb. 21 die Austrittsarbeit dadurch gekennzeichnet, daß der Potentialberg, welcher die Austrittsarbeit charakterisiert, viel höher ist als die Potentialberge zwischen den Potentialmulden der einzelnen Atome. Bei Metallen kann man dieses Modell sehr vereinfacht als sog. **Potentialtopf-Modell** (Abb. 23) darstellen, indem man sich die Leitungselektronen im Leitfähigkeitsband in einem einzigen Topf eingeschlossen denkt. Bei Metallen sind die Leitfähigkeitsbänder bis zu einem Energieniveau besetzt, welches **Fermi-Energie** oder **Fermi-Grenze** (die Fermi-Statistik beschreibt die Energieverteilung der Leitungslektronen im Kristall) genannt wird; aus diesem Grund spricht man auch von einem Fermi-See von Elektronen im Potentialtopf. Entsprechend

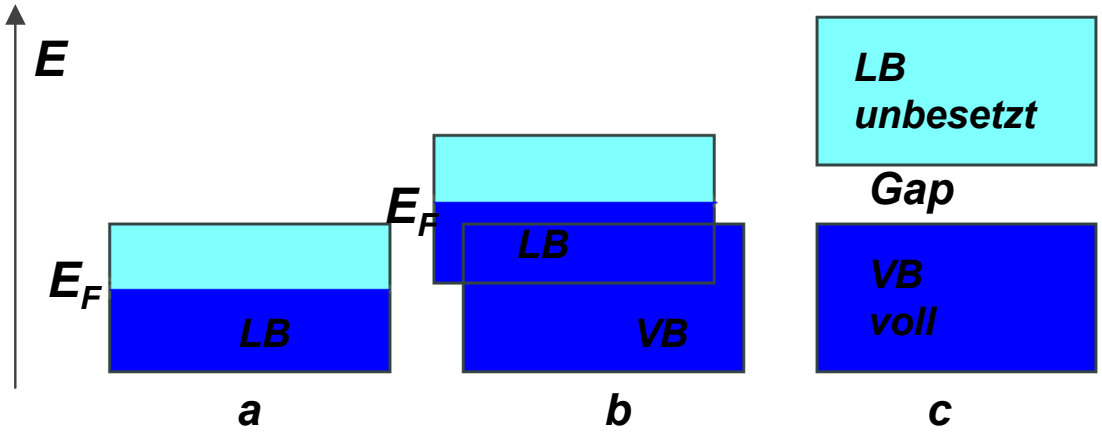


Abbildung 22: Schematische Darstellung eines halbbesetzen Bandes (Metall a), Valenzband (VB) und Leitungsband (LB) überlappen und sind mit Elektronen bis zur Femienergie E_F besetzt (Metall b), zwischen dem VB und LB sind keine Elektronenzustände erlaubt, abhängig von der Größe des Gaps →Eigenhalbleiter oder Isolator.

unseren Überlegungen muß man die Elektronen aus dem Fermi-See über den Potentialberg anheben, um sie dazu zu bringen, den Kristallverband zu verlassen. Der Energieunterschied zwischen der Fermi-Grenze und dem Potentialberg - in Abb. 23 mit W_A gekennzeichnet - stellt daher die **Austrittsarbeit** dar.

Die Fermi-Grenze wiederum ist charakteristisch für die Kristallart und die Temperatur der Elektronen; bei höherer Temperatur wird sie nach oben verschoben (richtiger: ausgeschmiert). Mit Hilfe des einfachen Potentialtopfmodells, das - es sei nochmals darauf hingewiesen - eine Vereinfachung ist und nur für Metalle gilt, können wir bereits einige wichtige Effekte erklären.

Zwei verschiedene Metalle haben unterschiedliche Austrittsarbeiten; veranschaulicht man beide durch ihr Potentialtopfmodell (Abb. 23), so sind sie gegenseitig so angeordnet, daß ihre beiden dem Außenraum entsprechenden Potentialberge gleich hoch liegen. Werden die beiden Metalle in Kontakt gebracht, so entsteht zwischen ihnen, wie zuerst von A. Volta beobachtet, eine Spannung, was folgendermaßen erklärt werden kann:

Die Berührung wirkt sich so aus, daß das Fermi-Niveau des einen Metalls höher liegt als das des anderen, es fließen also Elektronen vom höheren zum tieferen Niveau, der Kristall mit dem ursprünglich tieferen Niveau wird dadurch solange negativ gegen den anderen aufgeladen, bis die beiden Niveaus gleich hoch liegen; da nur wenige Elektronen fließen, kann man annehmen, daß sich die Fermi-Niveaus bezüglich ihres eigenen Kristalls kaum ändern, und die **Kontakt-Spannung** U zwischen beiden Metallen ist:

$$U = (W_{a2} - W_{a1})/e = \phi_2 - \phi_1$$

Kennt man die eine Austrittsarbeit, so kann man durch Messung der Kontaktspannung die andere bestimmen, wofür allerdings sehr saubere Versuchsbedingungen gegeben sein müssen. Durch Aufeinanderschichten verschiedener Metalle addieren sich die jeweiligen Kontaktspannungen (**Voltasche Säule**).

Die Kontaktspannung ist nicht ohne weiteres meßbar, da zur Spannungsmessung ein geschlossener Stromkreis realisiert wird (Abb. 24): **In einer geschlossenen Leiterschleife ist jedoch die Summe aller Kontaktspannungen Null** ! Wäre in einer geschlossenen Leiterschleife bei *konstanter Temperatur* $U \neq 0$, dann wäre der Stromkreis ein Perpetuum Mobile. Kontaktspannungen können mit einem Schwingkondensator, dessen Platten aus zwei verschiedenen Metallen bestehen, gemessen werden.

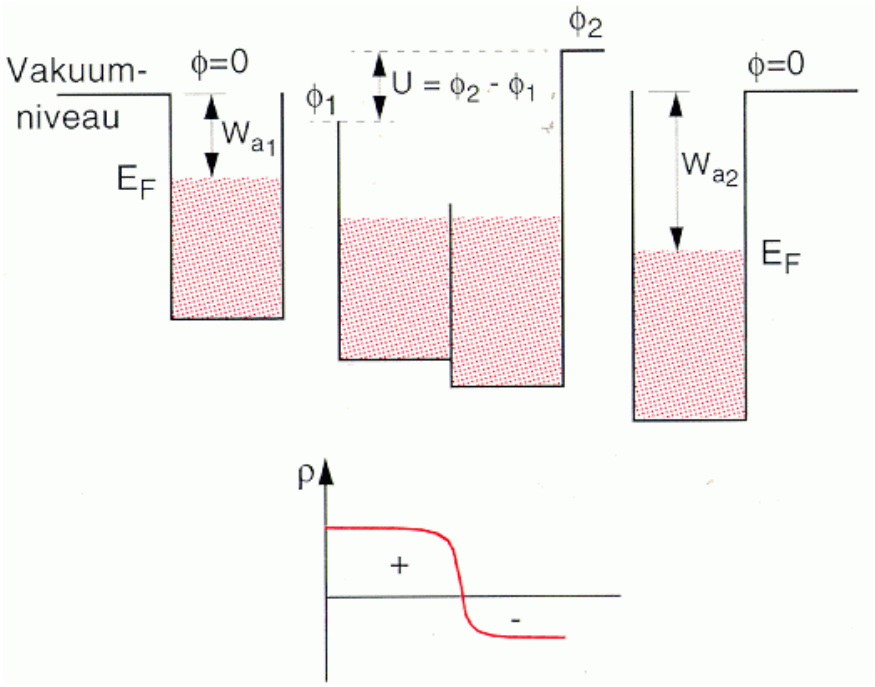


Abbildung 23: Kontaktspannung und Raumladungsverteilung beim Kontakt von zwei Metallen mit verschiedener Austrittsarbeit W_a

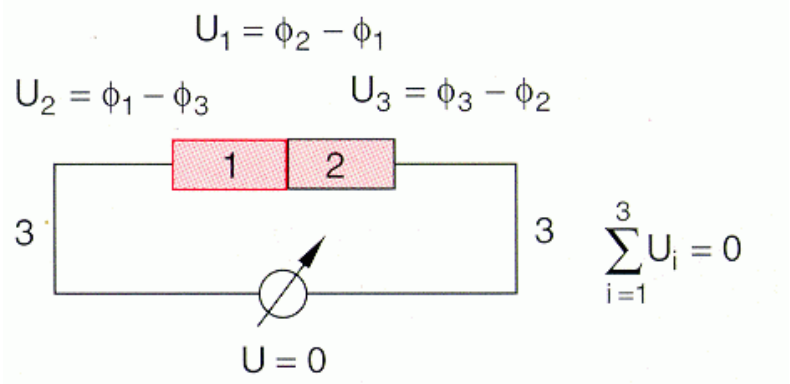


Abbildung 24: In einem Sromkreis ist die Summe aller Kontaktspannungen Null.

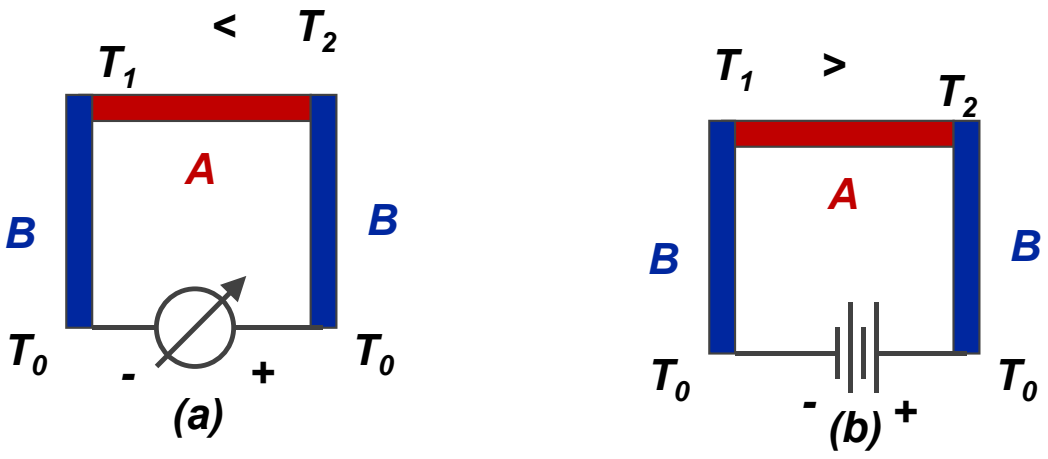


Abbildung 25: Zum Seebeck- (a) und Peltier Effekt (b)

4.3.2 Thermoelektische Effekte: Seebeck- und Peltier-Effekt

Nicht nur ein elektrisches Feld, sondern auch ein **Temperaturgradient** in **einem** Leiter verursacht einen Strom, bzw. einen Spannungsabfall, der in manchen Lehrbüchern fälschlicherweise mit Kontaktspannungen erklärt wird. Die folgende Erklärung ist vereinfacht; eine korrekte Beschreibung des Seebeck- und Peltier-Effektes ist nur mit der Boltzmannschen Transportgleichung in Kombination mit der Fermistatistik möglich.

Befinden sich die Enden eines Leiters auf unterschiedlichen Temperaturen $T_1 > T_2$, so haben die Ladungsträger am Ort 1, bzw. 2 (Abb. 25) unterschiedliche kinetische Energien $mv_1^2/2 \neq mv_2^2/2$. Dies bewirkt einen Wärmestrom, der durch Elektronen transportiert wird, von $1 \rightarrow 2$. Dadurch lädt sich das Ende von 2 negativ gegenüber 1 auf und die dabei auftretende Spannung bewirkt einen Strom in die entgegengesetzte Richtung, sodaß der Gesamtstrom Null ist. Die dabei auftretende Spannung wird als Thermospannung bezeichnet und die zum Ohmschen Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ analoge Beziehung ist

$$\vec{E} = K \,.\nabla T, \qquad \text{eindimensional} \qquad E_x = K \frac{\partial T}{\partial x},$$

wobei K der Seebeckoeffizient eine materialspezifische Größe ist. Ausgenützt wird die Thermospannung eines sogenannten Thermoelementes zur Temperaturmessung. Dabei werden in einer Leiterschleife zwei Metalle A und B kombiniert und deren Kontaktstellen (Lötstellen) auf unterschiedlichen Temperaturen gehalten. Die Leiterschleife sei offen, bzw. nur über ein sehr hochohmiges Voltmeter geschlossen (Abb. 25). Die vom Voltmeter gemessene Umlaufspannung ist:

$$\begin{aligned} U &= \int \vec{E}.d\vec{s} = \int_0^1 E_B dx + \int_1^2 E_A dx + \int_2^0 E_B dx = \int_2^1 E_B dx + \int_1^2 E_A dx = \\ U &= \int_2^1 K_B \frac{\partial T}{\partial x} dx + \int_1^2 K_A \frac{\partial T}{\partial x} dx = \int_{T_1}^{T_2} (K_A - K_B)\, dT = (K_A - K_B)\Delta T \end{aligned}$$

Günstigerweise kombiniert man in einem Thermoelement Metalle mit positivem und negativem Seebeckkoeffizienten, damit sich die Thermospannungen addieren. Durch Verwendung von Materialien mit bekannten Seebeckkoeffizienten kann auf diese Weise Temperatur gemessen werden: Eine Verbindungsstelle legt man auf eine fixe Temperatur (z.B. in schmelzendes Eis) und verwendet die andere Verbindungsstelle als Temperaturfühler; z.B. liefern Kupfer und Konstantan eine Thermospannung von etwa $53\,\mu\text{V}/^\circ\text{C}$.

Die Umkehrung dieses Effektes, das Anlegen einer Spannung in einem derartigen Kreis, führt zur *Abkühlung* des einen Verbindungspunktes und zur *Erwärmung* des anderen: **Peltier-Effekt**. Nach dem obigen einfachen Modell ist unabhängig von der Joulschen Wärme mit der elektrischen Stomdichte auch eine Wärmestromdichte verknüpft:

$$j_Q = \frac{dW}{dt} = \Pi\, j$$

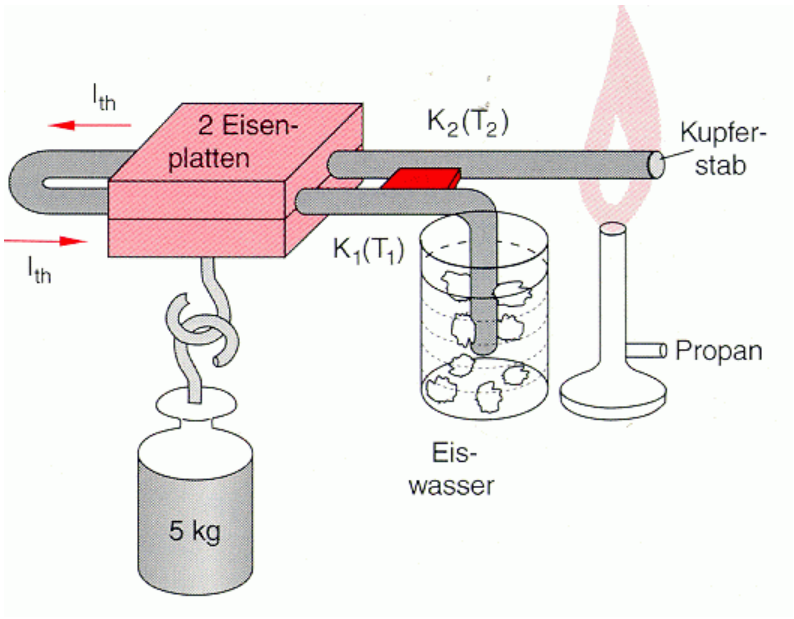


Abbildung 26: Demonstration großer Thermoströme, die durch ihr Magnetfeld ein 5 kg Gewicht halten.

wobei Π der Peltier-Koeffizient ist. Die Vorzeichenkonvention ist folgende: Wenn der Strom von A nach B fließt ist $\Pi_{AB} = \Pi_A - \Pi_B$ positiv bei Erwärmung der Lötstelle. Wenn man mit den Materialien A und B nacheinander den Peltier- und Seebeckeffekt untersucht, dann muß man, um in beiden Fällen die gleiche Strom-, bzw. Spannungsrichtung zu erhalten, beim Seebeck-Effekt eine Temperaturdifferenz herstellen, die der beim Peltier-Effekt entstehenden entgegengesetzt gerichtet ist. Seebeck-Effekt: $(K_A - K_B) > 0$, dann fließt der Strom an der kalten Lötstelle von A nach B. Bei geeigneten Materialien sind beträchtliche Temperaturunterschiede (Anwendung als Wärmepumpe) erzielbar.

5 Halbleiter

5.1 Eigenhalbleitung

Wir haben bei der Besprechung der Leitfähigkeit von Festkörpern anhand des Bändermodells (Abb. 21) gesehen, daß es neben den metallischen Leitern, die sich infolge ihrer Bänderkonfiguration durch besonders hohe Leitfähigkeit auszeichnen, auch Kristalle gibt, welche ein unbesetztes Leitfähigkeitsband und ein von diesem durch einen "verbotenen" Energiebereich getrenntes vollbesetztes Valenzband aufweisen. Derartige Kristalle werden nur dann Leitungserscheinungen aufweisen, wenn den Elektronen im Valenzband durch geeignete Mechanismen soviel Energie mitgeteilt wird, daß sie die verbotene Zone überspringen und in das Leitfähigkeitsband gelangen können.

Diese zum Auftreten von Leitungserscheinungen notwendige Energie kann z.B. auf Grund der thermischen Bewegung der Elektronen aufgebracht werden, bzw. durch ionisierende Strahlung. Man bezeichnet einen Kristall, der bei Normaltemperatur praktisch keine Leitung aufweist, als Isolator, wobei diese Isolatoreigenschaft bei starker Erhöhung der Temperatur verschwinden kann. Liegt bei Normaltemperatur bei einem reinen Stoff geringfügige Leitfähigkeit vor, so handelt es sich um einen Eigenhalbleiter; der Übergang zwischen Isolator und Eigenhalbleiter ist also nur in quantitativer Hinsicht zu ersehen. Ein Eigenhalbleiter hat daher eine stark temperaturabhängige Leitfähigkeit welche mit zunehmender Temperatur ansteigt - Eigenhalbleiter sind also Heißleiter. Isolatoren weisen spezifische Widerstände zwischen etwa 10^{24} und $10^{16}\,\Omega\cdot$m auf, Eigenhalbleiter zwischen 10^{11} und $1\,\Omega\cdot$m. Abb. 27 zeigt nochmals das Bänderschema für einen Eigenhalbleiter; ΔE stellt die Energiebreite der verbotenen Zone dar. Wichtige Eigenhalbleiter sind neben den Materialien Silizium und Germanium auch Selen, Indiumantimonid, Galliumarsenid, sowie die früher häufig gebrauchten Verbindungen Cu_2O, PbS und PbTe.

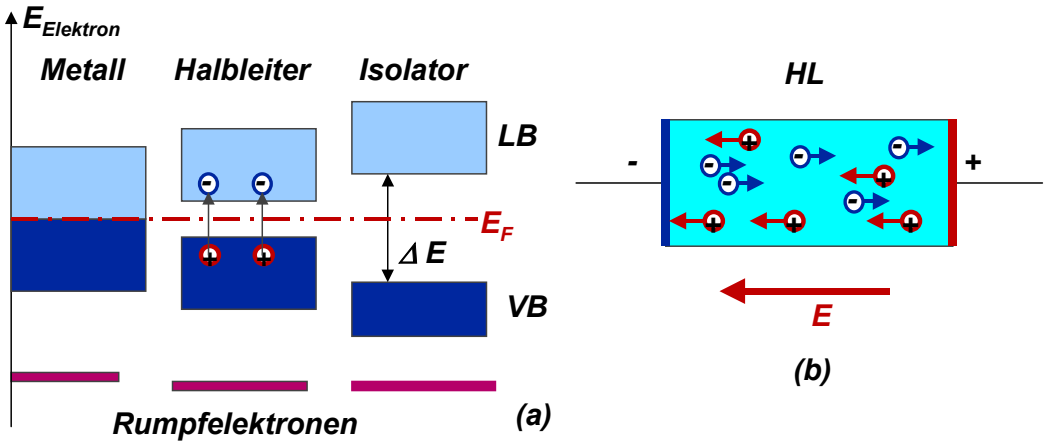


Abbildung 27: Bänderschema von Metall, Halbleiter und Isolator. Zur Leitfähigkeit σ tragen Elektronen und Löcher bei.

Für die Abhängigkeit der Leitfähigkeit bei Eigenhalbleitung kommt es nun natürlich auf das Verhältnis zwischen der Breite der Energielücke ΔE und der Kristalltemperatur T an; die Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerkonzentration wird mit der Fermistatistik beschrieben. Daraus ergibt sich die exponentielle Temperaturabhängigkeit, die auch in $\sigma(T)$ und $\rho(T)$ ersichtlich ist (Abb. 28):

$$n(T) = p(T) \propto AT^{3/2}\, e^{-\frac{\Delta E}{2k_B T}} \qquad \text{mit} \tag{16}$$

$$n(T) = p(T) \approx 10^{25}.e^{-\frac{\Delta E}{2k_B T}}\ [\mathrm{m}^{-3}]$$

T ... absolute Temperatur; der Beitrag der e-Potenz überwiegt meist den $AT^{3/2}$ Term; k_B ... Boltzmann-Konstante, $k \doteq 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$; n ... Dichte der Elektronen im Leitfähigkeitsband; p ... Dichte der **Löcher** im Valenzband; $\Delta E_{Si} = 1,12\,\mathrm{eV}$, $\Delta E_{Ge} = 0,67\,\mathrm{eV}$.

Löcher entstehen dadurch, daß Elektronen aus dem Valenzband in das Leitfähigkeitsband gehoben werden, wodurch auch im Valenzband unbesetzte Energiezustände auftreten und somit dort ebenfalls Platzwechselvorgänge möglich sind, die zur Leitfähigkeit mit der entsprechenden Beweglichkeit μ beitragen (siehe Abb. 27b). Herrscht also im Leitfähigkeitsband eine gewisse Elektronendichte n und im Valenzband eine Löcherdichte p, so ergibt sich bei Anlegen einer Spannung folgendes: Die Löcher bewegen sich in Richtung von $\vec{E}$, die Elektronen in entgegengesetzter Richtung, wobei beide zur Stromdichte $\vec{j}$ beitragen.

$$\sigma = |e|\,(n\mu_n + p\mu_p)$$

Da die Breite der verbotenen Zone bei Eigenhalbleitern im allgemeinen zwischen 0.3 und 3 eV liegt, ist Ionisierung auch durch sichtbares Licht möglich, und derartige Eigenhalbleiter verändern bei Belichtung ihren elektrischen Widerstand, z.B. Selen als Photowiderstand etc.

Bei Raumtemperatur beträgt die Elektronendichte im Leitfähigkeitsband für Silizium etwa $10^{16}/\mathrm{m}^3$, für Germanium $10^{19}/\mathrm{m}^3$. Es ist allerdings sehr schwierig, derart reine Kristalle zu erhalten, daß die Eigenleitung gegenüber der Störstellenleitung überwiegt; die Eigenleitung steigt jedenfalls exponentiell mit der Temperatur T an.

5.2 Störstellenhalbleitung

Von allen Halbleiterelementen haben Si und Ge die größte Bedeutung gewonnen, denn sie lasssen sich mit Elementen der III. und V. Hauptgruppe des Periodensystems gut dotieren.

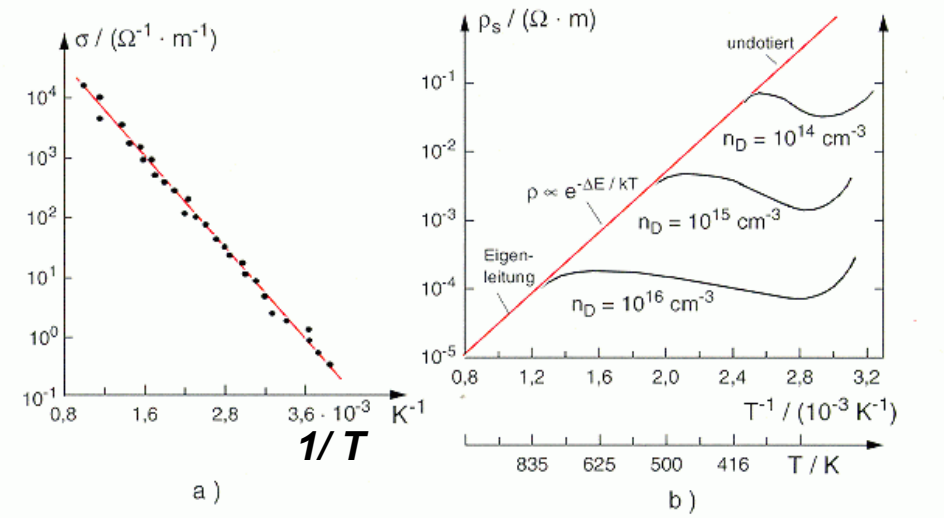


Abbildung 28: Temperaturabhängigkeit von ρ für Germanium mit verschiedenen Dotierungen. Bei hohen Temperaturen (links) ist der Anteil der Eigenleitung dominant. Aus der Steigung kann ΔE bestimmt werden.

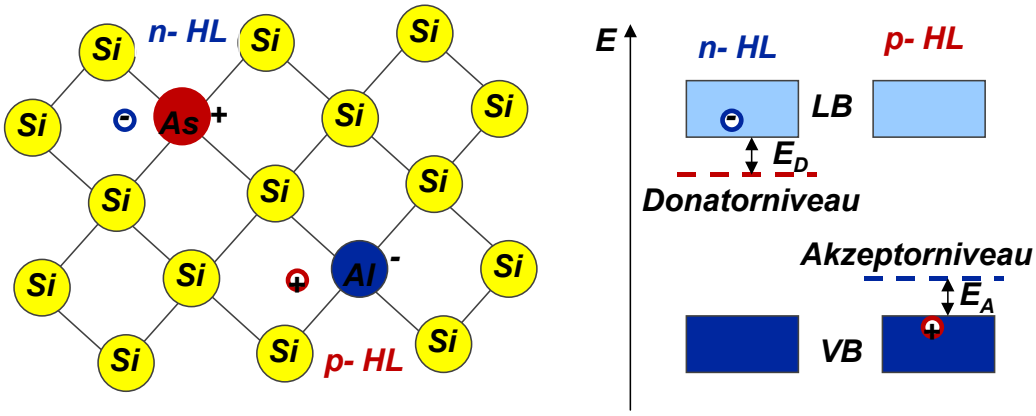


Abbildung 29: Schematische Darstellung von n und p Halbleiter durch Dotieren von Si mit As oder Al

III	IV	V
B	C	N
Al	Si	P
Ga	Ge	As
In	Sn	Sb
Tl	Pb	Bi

Durch geringfügigen Einbau von Fremdatomen in das Wirtsgitter der Eigenhalbleiter ändert sich die Leitfähigkeit ganz beträchtlich: z.B. bei Silizium mit einer Fremdatomkonzentration von $1{:}10^5$ um das Tausendfache gegenüber dem hochreinen Zustand. Dies kann folgendermaßen erklärt werden: An einem Gitterplatz von Si oder Ge (vierwertig) wird ein Atom mit einem überschüssigen, also fünften Valenzelektron eingebaut (siehe Abb. 29); dann ist das fünfte Elektron wesentlich schwächer gebunden als die anderen vier, es liegt also im Energiebändermodell weit über dem höchsten Niveau des Valenzbandes in der verbotenen Zone.

Ein derartiges Störstellenatom wird **Donator** genannt, weil es eine Ladung abgibt, und seine energetische Lage wird als Donatorniveau bezeichnet. Vom hochgelegenen Donatorniveau aus kann ein Elektron wesentlich leichter in das Leitungsband gelangen, weswegen die Leitfähigkeit je nach Störstellenkonzentration stark erhöht wird. Die Differenz zwischen dem Donatorniveau und der unteren Kante

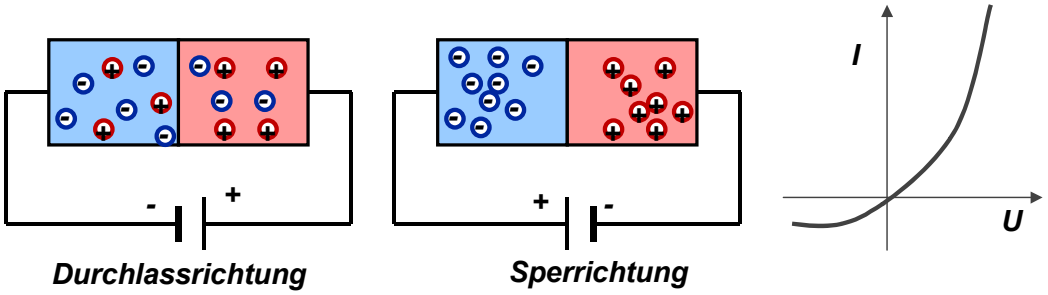


Abbildung 30: Halbleiterdiode, Strom-Spannungskennlinie

des Leitfähigkeitsbandes ist ΔE_D, welche in der folgenden Tabelle für einige Elemente in Silizium und Germanium angegeben ist:

Donator	P	As	Sb
ΔE_D/meV in Si	45	49	39
ΔE_D/meV in Ge	12	13	9

Donator-Halbleiter heißen auch Überschußhalbleiter; da die Leitung durch Elektronen erfolgt, nennt man derartig dotierte Kristalle auch **n-leitend**.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, daß in das Kristallgitter der *vierwertigen Atome dreiwertige* zusätzlich eingebaut werden. Nun bleibt eine Bindung praktisch unbesetzt, und es bedarf für Elektronen aus dem Valenzband nur geringerer Energie (auch hier wieder gleich der Ionisationsenergie), um diese Bindung auszufüllen, bzw. vom Bändermodell her gesehen, das Niveau dieser Störstelle, welche **Akzeptor** genannt wird, zu erreichen. Gelangt aber ein Elektron aus dem Valenzband auf das Akzeptorniveau, so bleibt im Valenzband ein "Loch" zurück, das seinerseits Platzwechselvorgänge im Valenzband und damit Störstellenleitung zuläßt, die als Mangelhalbleitung oder **p-Leitung** bezeichnet wird. Die folgende Tabelle führt einige Mangelhalbleiterdotierungen nebst der Energiedifferenz ΔE_A des Akzeptorniveaus zum Leitungsband an. p-leitende, bzw. n-leitende Halbleiterkristalle sind die Grundmaterialien für die heute zu überragender Bedeutung aufgestiegenen Halbleiterbauelemente wie Dioden, Transistoren, IC's, etc.

Donator	B	Al	Ga	In
ΔE_A/meV in Si	45	57	65	16
ΔE_A/meV in Ge	10,4	10,2	10,8	11

5.3 Halbleiterbauelemente und deren Anwendung

5.3.1 Dioden, Gleichrichter

Läßt man einen p-leitenden und einen n-leitenden Halbleiterkristall aneinandergrenzen, so werden die Löcher in den n-Leiter und die Elektronen in den p-Leiter solange eindiffundieren, bis die dadurch entstehende Polarisationsspannung den Vorgang zum Stillstand bringt. Bei Anlegen einer Spannung kann folgendes passieren (siehe Abb. 30): Wenn die Spannung so angelegt ist, daß sie die Elektronen weiter in den p-Leiter und die Löcher weiter in den n-Leiter treibt, kommt es zum Fließen eines Stromes: *Durchlaßrichtung*. Im anderen Fall verarmt die Verbindungszone an Ladungsträgern, es fließt praktisch kein Strom: *Sperrrichtung*. Eine derartige Anordnung heißt Diode, die entsprechende Strom-Spannungscharakteristik zeigt Abb.30c. Anwendung Gleichrichtung von Wechselstrom.

5.3.2 Transistoren

Durch Einführen eines p-leitenden Gebietes zwischen zwei n-Leiter bzw. eines n-leitenden Gebietes zwischen zwei p-Leiter entsteht ein Transistor, d.i. eine Doppeldiode bzw. ein steuerbarer Widerstand.

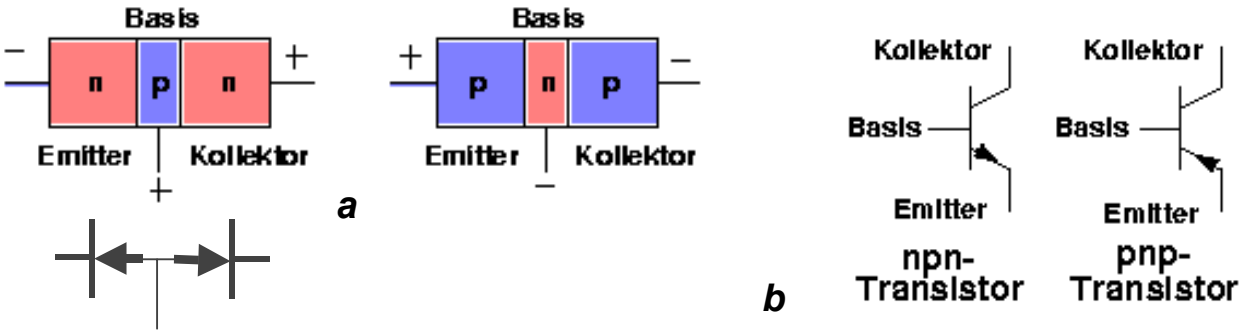


Abbildung 31: npn- und pnp Transistor (a) Schaltzeichen (b)

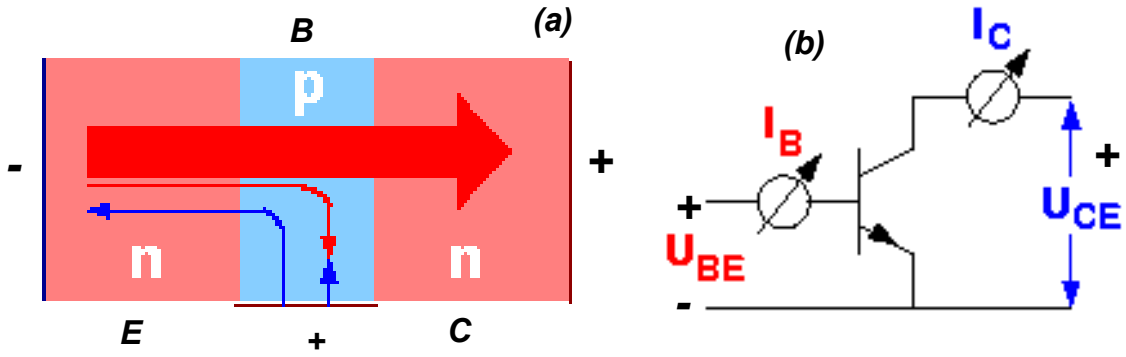


Abbildung 32: Emitter: Ladungsträger werden in die Basis emittiert, Kollektor: dort werden die Ladungsträger gesammelt (a), Emitterschaltung (b).

p-n-p-Transistor bzw. n-p-n-Transistor. Abb.31. Der Transistor wurde 1948 von Bardeen, Brattain und Shockley "entdeckt", er hat die bis dahin gebräuchlichen Elektronenröhren vollständig verdrängt.

Wir behandeln hier nur den npn Übergang und die Emmitter-Schaltung, der pnp Übergang verhält sich äquivalent, wenn alle Spannungspolaritäten umgedreht werden. (genaueres ⇒ Elektronikvorlesung 2. Sem.). Emitter: Ladungsträger werden in die Basis emittiert, Kollektor: dort werden die Ladungsträger gesammelt (Abb.32a). Bei der Emmitter Schaltung (Abb.32a) liegt eine positive Spannung zwischen Emitter und Kollektor, die Kollektorspannung U_{CE}.Wir betrachten folgende Fälle:

- Liegt die Basis auf einer negativen Spannung U_{BE} gegen Emitter, dann ist sowohl die BE-Diode wie auch die BC-Diode in Sperrrichtung gepolt ⇒ es fließt kein Strom.
- Ist die Basis jedoch positiv gegen den Emitter, dann ist die BE-Diode in Durchlaßrichtung und die BC-Diode weiter in Sperrrichtung, d.h. es fließt ein Löcherstrom I_B von der Basis allein zum Emitter. Es fließt ebenso ein Elektronenstrom vom Emitter in die Basisregion. Die Elektronen sehen jedoch das noch höhere Potential des Kollektors und diffundieren, wenn die Breite der Basisregion nur klein genug ist, völlig durch diese hindurch und werden vom Kollektor als Kollektorstrom I_C registriert. Hier steuert also der Basis*strom* I_B den Kollektorstrom I_C durch eine Veränderung der Sperrschichten.

  Die Stromverteilung ist in Abb.32a dargestellt. Das Verhältnis I_C/I_B ergibt den Stromverstärkungsfaktor, er hängt nur sehr wenig von der Kollektorspannung ab und ergibt sich in erster Näherung zu

  $$\frac{I_C}{I_B} = \frac{L}{W}$$

  wobei L und W die Breiten von Emmitter- und Basis-Region sind. Typische Werte sind 10... 100.

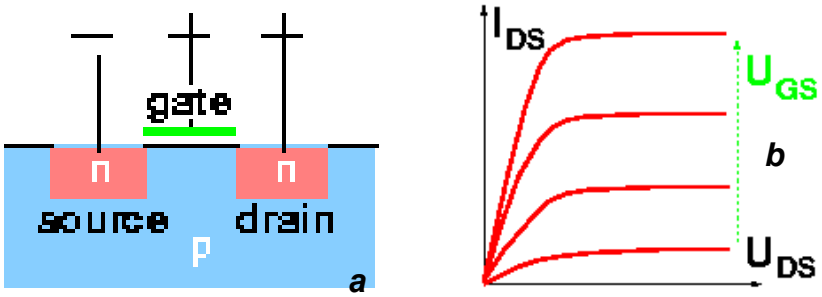


Abbildung 33: MOS-FET Aufbau (a), Kennlinie (b)

MOS-FET (MetallOxid-Semiconductor-FeldEffektTransistor) ist für hochintegrierte Schaltungen von besonderer Bedeutung. Prinzipieller Aufbau und Wirkungsweise sind schematisch in Abb.33 dargestellt. Im p-Substrat sind zwei n-Kontakte, *Source (S)* und *Drain (D),* eingelassen. Zwischen S und D befindet sich eine durch die Metalloxidschicht vom Substrat isolierte Metallelektrode, das *Gate (G).* Zwischen p- und n-material entsteht eine Sperrschicht, die trotz der Spannung U_{DS} zwischen S und D den Strom I_{DS} sperrt, und zwar unabhängig von der Polarität der Spannung. Legt man an G eine positive Spannung U_{GS}, so wird durch Influenz zwischen S und D ein n-leitender Kanal mit negativer Ladungsträgerdichte ρ^- gebildet, dessen Leitfähigkeit $\sigma = \rho^- \mu^-$ von der Stärke der Spannung U_{GS} abhängt. Hier steuert also die Gate-*Spannung* den Strom I_{DS} durch eine Veränderung der Kanalleitfähigkeit.

6 Elektrizitätsleitung in Flüssigkeiten

Wie sich in den vorangegangenen Kapiteln bereits gezeigt hat, ist eine grundsätzliche Voraussetzung dafür, daß ein Stoff elektrischen Strom leiten kann, das Vorhandensein beweglicher elektrischer Ladungsträger. Diese sind bei Metallen ausschließlich negativ geladene Elektronen. Bei den hier zu behandelnden **elektrolytischen** Flüssigkeiten sind die Ladungsträger ausschließlich Ionen, und zwar sowohl positiv als auch negativ geladene.

M. Faraday (1791 - 1867) spielte bei der Beschreibung der Grundlagen elektrochemischer Vorgänge eine hervorragende Rolle. Die Begriffe **Elektrolyt**, Elektrode, Ion, Kation, und Anion wurden bereits von ihm als Nomenklatur in die Elektrochemie eingeführt und sind bis heute erhalten geblieben.

Abb. 34 zeigt die klassische Versuchsanordnung zum Nachweis der Leitfähigkeit von angesäuertem Wasser (z.B. wäßrige Lösung mit Kochsalz). Während bei Anlegen einer elektrischen Spannung an die beiden Metall-Elektroden bei reinem (zweimal destilliertem) Wasser praktisch kein Strom fließt, erhalten wir bei Zugabe eines im Wasser löslichen Stoffes sofort einen erheblichen Stromfluß. Der Grund dafür ist folgender: Der im Wasser aufgelöste Stoff ist mehr oder weniger vollständig in seine Ionen dissoziiert. Die positiven Ionen (Kationen) wandern zur Kathode (K), die negativen Ionen (Anionen) zur Anode (A). Die Kationen nehmen an der Kathode Elektronen auf, während die Anionen ihrerseits an der Anode Elektronen abgeben. Wir wollen uns dies anhand der Elektrolyse einer wäßrigen Kochsalzlösung genauer ansehen. Elektrolytische Dissoziation:

$$\mathrm{NaCl} \longleftrightarrow \mathrm{Na^+} + \mathrm{Cl^-}$$

bei K: $\mathrm{Na^+} + \mathrm{e^-} \rightarrow \mathrm{Na}$ kathodischer Reduktionsvorgang
bei A: $2\blacksquare(\mathrm{Cl^-} - e^-) \rightarrow \mathrm{Cl_2}$ *anodischerOxidationsvorgang*

Faraday hat als erster (1831) die quantitativen Zusammenhänge zwischen der bei der Elektrolyse durch den Elektrolyten hindurchgeflossenen Ladungsmenge Q und der dabei entstehenden Masse m der Elektrolyseprodukte untersucht. Er hat folgendes experimentell gefunden:

1. Faradaysches Gesetz:

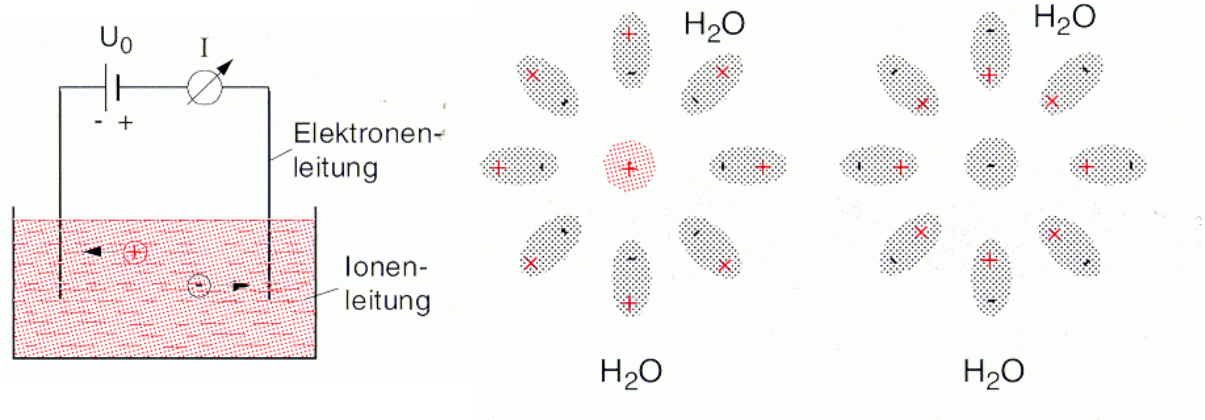


Abbildung 34: Elektrolytische Leitung (a), Anlagerung von Wasser-Dipol-Molekülen an ein pos. bzw. neg. Ion.

Beim Stromdurchgang durch Elektrolyten sind die Abscheidungsmengen proportional den hindurch gegangenen Elektrizitätsmengen $\int I(t) \cdot dt = Q$.

2. Faradaysches Gesetz:

Gleiche Elektrizitätsmengen scheiden aus verschiedenen Elektrolyten Stoffmengen ab, die dem chemischen Äquivalentgewicht proportional sind:

$$\text{Äquivalentgewicht} \equiv \text{val} = \frac{\text{Atomgewicht}}{\text{Wertigkeit}} \quad . \tag{17}$$

Kombination des 1. und 2. Faradayschen Gesetzes ergibt:

Faradaysches elektrochemisches Äquivalenzgesetz (1833)**:** Um an einer Elektrode aus einem Elektrolyten ein Mol eines Z-wertigen Stoffes abzuscheiden, ist eine Elektrizitätsmenge von

$$Q \approx Z \cdot 9,65 \cdot 10^4 \,\text{A} \cdot \text{s} \tag{18}$$

notwendig. Zur Abscheidung eines Grammäquivalentes eines Stoffes benötigt man immer die gleiche Ladung, nämlich die sog. **Faraday-Konstante**:

$$F = 96485.3 \,\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{val}} \quad . \tag{19}$$

Beide Faradayschen Gesetze folgen aus der Annahme, daß die Ionen so viele Elementarladungen tragen, wie ihre Wertigkeit Z angibt. Bezeichnet $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ als **Avogadro-Konstante (Loschmidtsche Zahl)**[2] die Anzahl der Ionen im Grammatom, so tragen diese Ionen die Ladung $Z \cdot e \cdot N_A$. Ein Grammäquivalent trägt nur $1/Z$ davon; definitionsgemäß ist dies die Faradaysche Konstante:

$$F = e \cdot N_A \quad . \tag{20}$$

Aus (20) ergibt sich somit für die Größe der Elementarladung:

$$e = \frac{F}{N_A} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \quad . \tag{21}$$

Dieser mit den Faradayschen Gesetzen bestimmte Wert der Elementarladung stimmt übrigens hervorragend mit den Werten von e überein, die aus ganz andersartigen Messungen, z.B. dem sog. Millikan-Versuch (Bewegung geladener Öltröpfchen im elektrischen Feld; s. Quantenphysik, 3. Semester) erhalten wurden. Damit haben die Faradayschen Gesetze eine viel allgemeinere Bedeutung erlangt.

Folgende Tabelle gibt elektrochemische Abscheidungsmengen für verschiedene Substanzen durch den Strom von 1 A an:

[2] In der englischen Literatur wird häufiger Avogadro Zahl für N_A verwendet, obwohl die Avogadro Zahl eigentlich die Anzahl der Teilchen eines Gases in 1 m^3 ist: $2{,}5.10^{25}\,m^{-3}$

	Ag^+	Cu^{++}	Ni^{++}	Hg^{++}
1Sekunde	1,118mg	0,3294mg	0,3058mg	1,04mg
1Minute	67,08mg	19,76mg	18,30mg	61,40mg
1Stunde	4025mg	1186mg	1098mg	3744mg
Atomgewicht	107,9	63,5	58,7	200,6
mval/A.h	37,4	37,35	37,41	37,33

Die Werte zeigen beispielsweise, daß wir für eine Ladungsmenge von 3600 A·s eine Abscheidung von rund 37.4 mg pro chemischer Wertigkeit erhalten, womit wir auf die Größe der Faraday-Konstante kommen:

$$\frac{3600\text{s}}{0.0374\ \text{val/A}} = 96300\,\frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{val}} \quad .$$

Die Tabelle enthält auch die früher gebräuchliche Ampère-Definition über die Abscheidung von 1.118 mg Silber pro Sekunde aus einer $AgNO_3$-Lösung im sog. *Silbervoltameter*.

Mit der Elektrolyse erfolgt die weit verbreitete **galvanische Oberflächenbeschichtung**. Ein unedles korrosionsanfälliges Metall wie z.B. Stahl kann so als Kathode in einer Elektrolytlösung, die etwa Chrom-, Nickel- oder Goldionen enthält, mit dem edleren Metall beschichtet werden. Als Anode dient dabei das jeweilige Material, damit die Ionenkonzentration des edlen Metalls in der Lösung konstant bleibt.

6.1 Leitfähigkeit in Elektrolyten

In der Lösung zwischen zwei hinreichend großen planparallelen Platten herrscht das homogene Feld $E \approx U/d$. An einem Z-wertigen Ion greift die Kraft $F = Z \cdot e \cdot E = Z \cdot e \cdot U/d$ an. Wie im Metall führt dies nicht zu einer beschleunigten, sondern zu einer gleichförmigen Bewegung, da eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft F_R im Elektrolyten vorhanden ist. Die Ionen wandern so schnell, daß $F = -F_R$ wird. Ihre Geschwindigkeit ist also proportional zum Feld, nämlich für

$$\text{Kationen} \quad v_+ = \mu_+ \cdot E \quad \text{und} \quad \text{Anionen} \quad v_- = -\mu_- \cdot E \ ;$$

μ_+ und μ_- sind die Beweglichkeiten der $\pm$ Ionen. Man definiert sie i.a. als positive Größen, auch für die Anionen, die entgegen der Feldrichtung laufen; dann muß im Ausdruck für v_- ein Minuszeichen stehen. Wenn die Teilchenzahldichten von Kationen und Anionen n_+ und n_- sind, erhalten wir für die Stromdichten:

$$\begin{aligned} j_+ &= Z_+\, e\, v_+\, n_+ = Z_+\, e\, \mu_+\, E\, n_+ \\ j_- &= -Z_-\, e\, v_-\, n_- = +Z_-\, e\, \mu_-\, E\, n_- \quad . \end{aligned}$$

Beide Ionensorten liefern einen positiven Beitrag zum Strom, denn der "rückwärts" laufende Strom der negativen Anionen ist auch positiv zu werten. Die Gesamtstromdichte ist:

$$j = j_+ + j_- = e \cdot (Z_+\, \mu_+\, n_+ + Z_-\, \mu_-\, n_-) \cdot E \quad .$$

Die Leitfähigkeit des Elektrolyten ist also:

$$\sigma = \frac{j}{E} = e \cdot (Z_+\, \mu_+\, n_+ + Z_-\, \mu_-\, n_-) \quad . \tag{22}$$

Bei einem Elektrodenquerschnitt A ist der Gesamtstrom I:

$$I = j\, A = A\, \sigma \frac{U}{d} \quad . \tag{23}$$

Gleichung (23) stellt das Ohmsche Gesetz für die Leitfähigkeit von Elektrolyten dar. Für σ ist dabei der Wert von Beziehung (22) einzusetzen.

Die Beweglichkeiten μ_+ und μ_- sind für Elektrolyten typischerweise 10^4-mal kleiner als für die Elektronen in Metallen. Dimension der Beweglichkeit:

$$[\mu] = \frac{[v]}{[E]} = \text{m}^2\ \text{V}^{-1}\ \text{s}^{-1} \quad .$$

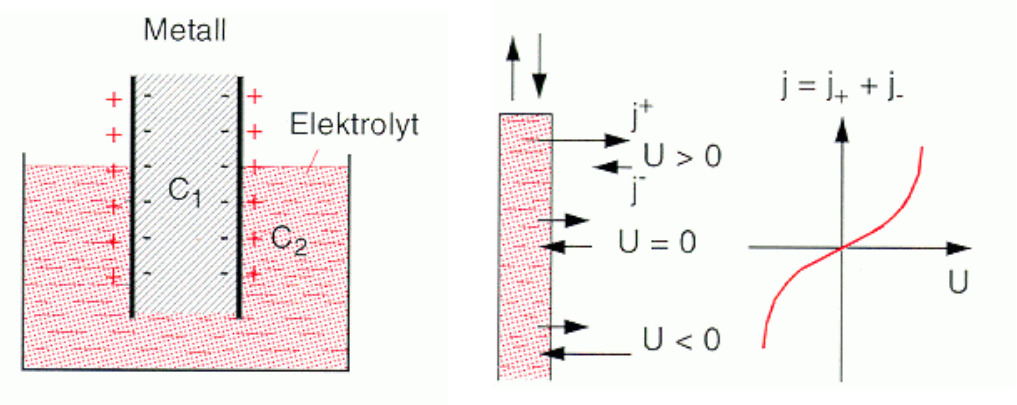


Abbildung 35: Aufbau einer Raumladungsschicht mit der Potentialdifferenz $\Delta\phi = U_0$ zwischen Metallelektrode und Elektrolyt; Strom- Spannungskennline für die Grenzschicht, wobei U die extern angelegte Spannung ist.

6.1.1 Galvanische Elemente und Volta'sche Spannungsreihe

Die Namen gehen auf den Anatomen L. Galvani (1737 - 1798; 1789 Froschschenkelversuche) und den Physiker A. Volta (1745 - 1827; 1800 Voltasche Säule, 1801 Voltasche Spannungsreihe) zurück.

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit der Entstehung und den Eigenschaften von Ionen in Elektrolyten beschäftigt. Dabei waren die Elektroden in den meisten Beispielen "inert", also nicht direkt an der chemischen Reaktion beteiligt, sondern dienten lediglich als Quelle oder Senke von elektrischen Ladungen. Für die meisten Metalle stellt sich aber heraus, daß sie sich als Elektroden in Elektrolyten nicht inert verhalten.

Metalle sind im Gegensatz zu ihren Salzen im Wasser kaum löslich. Wir betrachten als Beispiel die Lösung von Zn in $ZnSO_4$: Wie das kristallisierte Zinksulfat enthält das metallische Zink positive Zinkionen als Kristallgitter-Bausteine; aber statt der SO_4^{2-}-Ionen sind die negativen Bestandteile hier die Leitungselektronen. Beim Lösen des $ZnSO_4$ in Wasser gehen beide Ionenarten in Lösung:

$$ZnSO_4 \longleftrightarrow Zn^{2+} + SO_4^{2-} \quad .$$

Beim Lösen des Metalls kann nur das Zn-Ion in Lösung gehen, denn es gibt keine gelösten freien Elektronen. Der Auflösungsvorgang wird gestoppt, sobald das durch die Trennung von Ionen und Elektronen an der Grenze zwischen Metall und Flüssigkeit hervorgerufene elektrische Feld so stark geworden ist, daß die geladenen Ionen des Metalls die Energie zur Durchquerung dieser elektrischen Doppelschicht nicht mehr aufbringen können (siehe Abb. 35). Es besteht also an der Grenze eine Doppelschicht und zwischen dem Inneren des Metalls und der Lösung eine **Polarisationsspannung**, welche die positiven Ionen im Metall zurückhält (die Elektronen verbleiben im Metall) und für die Kombination von Metall und Elektrolyt charakteristisch ist. Die Bindungsenergie $|e\phi_1|$ der Ionen im Metall ist im allgemeinen wesentlich größer als im Elektrolyt $|e\phi_2|$, wo sie durch die Anlagerung an die Wassermoleküle bestimmt wird. Dadurch wird die Potentialdifferenz $\Delta\phi = U_0$ aufgebaut, die zur Spannung U_0 zwischen Metall und Elektrolyt führt. Diese treibt die Ionen wieder zurück in die Elektrode. Gleichgewicht herrscht, wenn sich die Spannung U_0 aufgebaut hat und die in Lösung gehenden Ionen/Zeit gleich der Zahl der in die Elektrode zurückkehrenden Ionen /Zeit ist. Für die Ionenkonzentration c_1 im Elektrolyt und Ionenkonzentration c_2 im Metall gilt das Boltzmannsche Gleichgewicht:

$$\frac{c_1}{c_2} = e^{-eU_0/k_BT}$$

Dabei fließt durch die Elektrode kein Nettostrom; Wird jedoch eine äußere Spannung U an die Elektrode (gegen den Elektrolyt) angelegt, gehen positive Metallionen vermehrt in Lösung (Abb. 35 b)

Das Bestreben der Metallionen, in Lösung zu gehen, wird nach W. Nernst (1889) **"Lösungstension"** genannt und ist von Element zu Element verschieden.

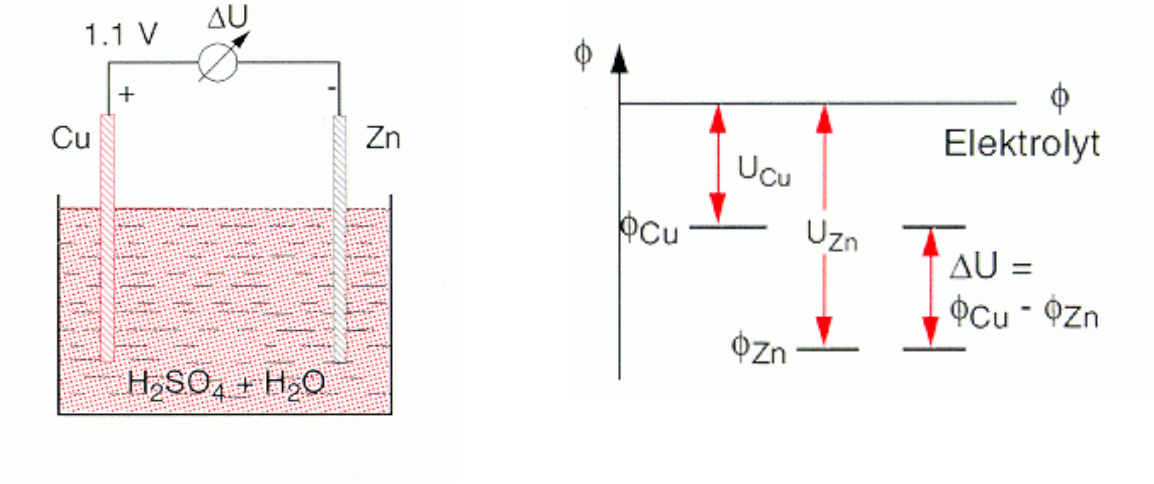


Abbildung 36: Galvanisches Element (a), Potentialdifferenzen (b)

Der vorhin beschriebene Potentialsprung zwischen Metall und Flüssigkeit wird auch als **"Galvani-Potential"** bezeichnet.

6.1.2 Voltasches oder Galvanisches Element:

Bringt man zwei verschiedener Metalle mit den Potentialdifferenzen $\Delta\phi_1 = U_1$und $\Delta\phi_2 = U_2$ (zwischen Elektrode und Elektrolyt) in einen gemeinsamen Elektrolyten, so mißt man die Spannungsdifferenz $\Delta U = U_1 - U_2$. $\rightarrow$ Eine derartige Anordnung heißt galvanisches Element (siehe Abb. 36). Das Metall mit der größeren Lösungstension (Zn in Abb. 36b) verliert mehr positive Metallionen und wird dadurch negativer. Die entstehende Spannung zwischen den Elektroden (Polen) beträgt bei dem in Abb. 36 gezeigten Volta'schen Cu-Zn-Element ca. 1.1 V. Sie ist die Differenz aus den Spannungen der einzelnen Elektroden gegen den Elektrolyten. Bei offenem Element, d.h. wenn die Elektroden nicht durch einen Leitungsdraht verbunden sind, ist das Potential im Elektrolyten konstant.

Als **Volta-Spannung** meßbar ist also nur die Differenz der Galvani-Potentiale:

$$\Delta U = \phi_{Cu} - \phi_{Zn}.$$

Es ist nicht möglich, die Potentialdifferenz zwischen einem Metall und einem Elektrolyten unmittelbar zu messen. Man kann aber die verschiedenen Metalle nach ihren Spannungsdifferenzen ΔU gegeneinander in eine **Spannungsreihe** einordnen. Man setzt willkürlich die Spannung einer mit Wasserstoff umspülten Platinelektrode (einer sog. *Wasserstoffelektrode*) gegen eine 1-molare Säurelösung (1mol Ionen pro Liter Lösung) gleich Null. Dann ergeben sich die in der Tabelle angegebenen Spannungen der übrigen Metalle gegen ihre das gleiche Metallion enthaltende 1-molare Elektrolytlösung.

Elektrode	Li	K	Na	Mg	Zn	Fe	Cd
U/V	-3,02	-2,92	-2,71	-2,35	-0,76	-0,44	-0,402
Elektrode	Ni	Pb	H_2	Cu	Ag	Hg	Au
U/V	-0,25	-0,126	0	+0,345	+0,8	+0,86	+1,5

Die in der Tabelle gezeigten Normalspannungen der Metalle werden auch als **Voltasche** (oder **Galvanische**) **Spannungsreihe** bezeichnet. Aus ihr können wir z.B. sofort durch das Ablesen der Werte für Cu und Zn die Volta-Spannung für das Cu-Zn-Volta-Element zu 1.107 V ermitteln. Es fällt auf, daß die Normalspannungen von edlen Metallen, die ihren metallischen Glanz über lange Zeit behalten, positiv sind, während die Potentiale der leicht oxidierenden und korrodierenden, also "unedlen" Metalle negative Vorzeichen haben.

Verbindet man die Pole des galvanischen Elementes mit einem Lastwiderstand so fließt der Strom

$$I = \frac{U}{R_i + R_a}$$

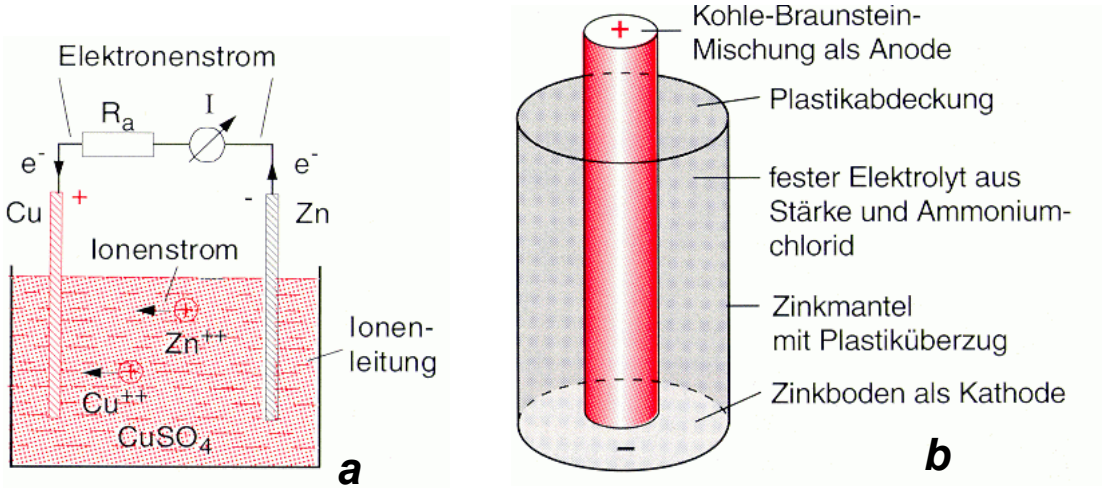


Abbildung 37: Galvanisches Element mit $CuSO_4$ Elektrolyt (a), Trockenbatterie, Leclanche Element

wobei R_i der Innenwiderstand des galvanischen Elementes ist. Dieser ist von der Beweglichkeit μ der Ionen, ihrer Konzentration c und der Geometrie der Anordung abhängig. Bei homogener Stromdichte zwischen zwei Plattenelektroden mit der Fläche F im Abstand d ist

$$R_i = \frac{d}{\sigma_{el} F} = \frac{m.d}{cq^2 \tau F}$$

wobei $\tau = \Lambda/v$ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen der Ionen ist.

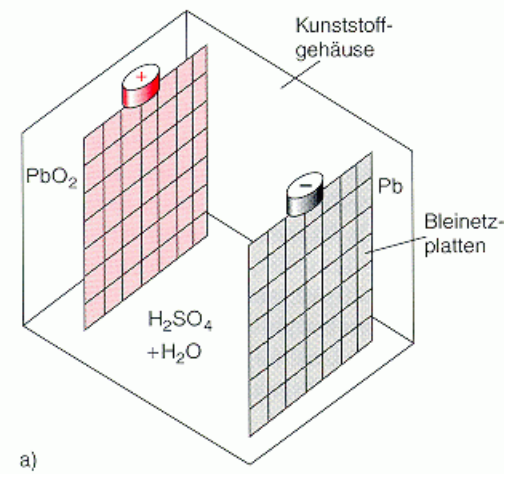
Der Strom wird im Metall durch Elektronen getragen. Dadurch entsteht ein Elektronenmangel an der Zn Elektrode und ein Elektronen Überschuß an der Cu Elektrode. Dies gibt eine Spannungsänderung, die durch die Ionenwanderung (Zn^{++} zur Cu Elektrode) im Elektrolyt ausgeglichen wird. Die Zn Elektrode wird immer dünner und die Cu Elektrode wird mit neutralen Zn Atomen überzogen. Die Spannung des Elementes sinkt, bis die Cu Elektrode vollständig mit Zn überzogen ist (zwei gleichwertige Elektroden). Die Lebensdauer kann durch einen $CuSO_4$ Elektrolyt verlängert werden (Abb.37a): Durch die zusätzliche Abscheidung von Cu^{++} aus dem Elektrolyt werden immer neue Cu Schichten an der Cu Elektrode gebildet.

6.2 Batterien und Akkumulatoren

Grundsätzlich werden an galvanische Elemente, in denen elektrische Energie in Form von chemischen Produkten gespeichert ist, von der Anwendung her sehr verschiedene Anforderungen gestellt. So soll beispielsweise die Batterie einer elektrischen Armbanduhr über möglichst lange Zeit eine sehr geringe elektrische Leistung abgeben können. Sie soll bei kleinen Abmessungen also eine möglichst große **Energiedichte** besitzen (Energiedichte = gespeicherte Energie/Masse der Batterie). Andererseits muß die Starterbatterie eines Autos in der Lage sein, beim Anlaßvorgang kurzzeitig eine elektrische Leistung von über 1000 Watt abzugeben. Hier ist eine hohe **Leistungsdichte** gefordert (Leistungsdichte = maximal entnehmbare elektrische Leistung/Masse der Batterie). Zu diesen beiden Beispielen ließe sich noch eine Vielzahl weiterer hinzufügen. Diese extremen Unterschiede haben dazu geführt, daß in den letzten Jahren eine kaum noch überschaubare Zahl von Batteriesystemen und -typen entstanden ist. Wir wollen uns hier auf nur einige wenige Beispiele beschränken.

Eine der historisch wichtigsten Batterien ist das **Leclanché-Element** (Abb.37b). Diese auch als **Trockenbatterie** bezeichnete Zelle wird heute noch immer häufig verwendet. Die stromliefernden Reaktionen sind: Kohle Braunstein (MnO_2) Mischung als Anode und Zn Boden als Kathode. Zwischen den beiden befindet sich ein verfestigter Elektrolyt NH_4Cl.

Lithiumbatterien sind in den letzten Jahren entwickelt worden und haben eine sehr hohe Energiedichte. Dieses wird hauptsächlich dadurch erreicht, daß die Normalspannungen der Anoden- und der Kathodenreaktion sich sehr stark voneinander unterscheiden (Li steht am extrem negativen Ende



Anode: $PbO_2 + 3H^+ + HSO_4^- + 2e^- \rightarrow PbSO_4 + 2H_2O$

Kathode: $Pb + SO_4^{--} \rightarrow PbSO_4 + 2e^-$

Abbildung 38: Bleiakkumulator, Entladevorgang

der Spannungsreihe). So beträgt die Spannung einer Li-Thionylchlorid-Batterie etwa 3 V, was Serienschaltungen mehrerer Batterien für den Betrieb elektronischer Schaltungen mit Transistoren überflüssig macht.

6.2.1 Akkumulator

Bei den Akkumulatoren (= wiederaufladbare Elemente) ist nach wie vor der **Bleiakkumulator** der wichtigste Vertreter. Man kennt ihn als Starterbatterie in Autos oder als Energiequelle von z.B. kleinen, elektrisch betriebenen Transportfahrzeugen (Hubstapler, Elektro-Autos). Zweckmäßigerweise spricht man bei Akkumulatoren von positiver und negativer Elektrode statt von Anode und Kathode, da sich letztere beide Begriffe je nach dem, ob man lädt oder entlädt, vertauschen und daher nicht eindeutig sind.

Stellt man zwei Bleiplatten in verdünnte Schwefelsäure, so überziehen sie sich mit einer Schicht aus Bleisulfat ($PbSO_4$). Schickt man einen Strom durch die Zelle (Ladung), so treten folgende Reaktionen auf:

$$\begin{aligned} \text{Ladevorgang:} \quad \ominus \quad & PbSO_4 + H_2 \longrightarrow Pb + H_2SO_4 \ , \\ \oplus \quad & PbSO_4 + SO_4 + 2H_2O \longrightarrow PbO_2 + 2H_2SO_4 \ . \end{aligned}$$

Bei der Elektrolyse (dem Aufladen), entsteht an der negativen Elektrode metallisches Blei und an der positiven Elektrode (braunes) Bleidioxid. Die Spannung einer Zelle des Akkumulators beträgt 2.02 V; positiver Pol ist die mit PbO_2 beladene Platte, welche bei der Stromentnahme reduziert wird. Die Stromlieferung erfolgt in der umgekehrten Richtung wie der Ladestrom und bleibt so lange aufrecht, bis die bei der Aufladung entwickelten Substanzen verbraucht sind und sich wieder $PbSO_4$-Schichten ausgebildet haben. Beim Entladen eines Bleiakkumulators gewinnt man etwa 70 - 80% der beim Laden in ihn hineingesteckten Elektrizitätsmenge (gemessen in A·h) zurück. Die Energiedichte beträgt ca. 16 W·h/kg.

Beim **Ni-Fe-Akkumulator**, der von Edison erfunden wurde, befindet sich im ungeladenen Zustand eine Eisenhydroxid- bzw. Nickelhydroxid-Elektrode in 20%-iger Kalilauge (KOH).

$$\begin{aligned} \text{Laden:} \quad \ominus \quad & Fe(OH)_2 + 2e^- \longrightarrow Fe + 2OH^- \\ \oplus \quad & 2Ni(OH)_2 + 2OH^- \longrightarrow 2Ni(OH)_3 + 2e^- \ . \end{aligned}$$

Beim Entladen laufen die chemischen Reaktionen genau umgekehrt ab. Die Spannung des Ni-Fe-Akkumulators beträgt im Mittel 1.2 V und steigt bei der Ladung auf 1.4 V. Sein Wirkungsgrad beträgt etwa 60%. Vorteile gegenüber dem Pb-Akkumulator sind sein geringeres Gewicht und seine

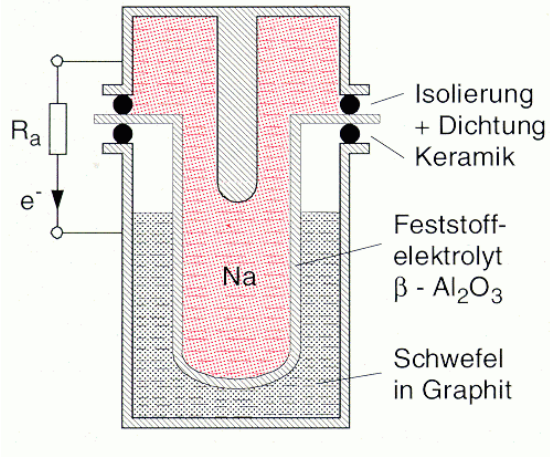


Abbildung 39: Natrium Schwefel Batterie

Unempfindlichkeit. Er kann z.B. längere Zeit im geladenen und im ungeladenem Zustand sein; letzteres führt beim Pb-Akkumulator zur Zerstörung der Platten.

Eine wichtige Neuentwicklung auf dem Gebiet der wiederaufladbaren elektrochemischen Energiespeicher ist die **Natrium-Schwefel-Batterie**, die man eigentlich besser mit Na-S-Akkumulator bezeichnen sollte. Dieses System ist - ähnlich wie die Li-Batterie - in der Lage, im Prinzip eine sehr hohe Energiedichte zu erreichen, da Natrium eine geringe Dichte besitzt und außerdem weit auf der negativen Seite der Spannungsreihe steht. Den schematischen Aufbau einer solchen Na-S-Batterie zeigt Abb. 39. Das Besondere an dieser Zelle ist, daß der Elektrolyt fest ist.

Entladen : Anode :$S + 2Na^+ + 2e^- \rightarrow Na_2S$

Kathode: $Na \rightarrow Na^+ + e^-$

Die Spannung beträgt etwas über 2 V, die theoretische Energiedichte liegt bei 1000 W·h/kg (60mal Pb-Akku !). Ein weiterer Vorteil der Na-S-Batterie besteht darin, daß die zur Verwendung kommenden Materialien billig und in großer Menge vorhanden sind. Nachteil ist, daß sie bei Temperaturen von 300 - 350 °C betrieben werden muß, was bei praktischer Anwendung (z.B. in E-Autos) umfangreiche Wärmeisolierungen notwendig macht, womit sich die tatsächlich erreichbare Energiedichte wesentlich verringert.

6.3 Chemische Brennstoffzellen

Beim Akkumulator wird die chemische Energie der im Akkumulator vorhandenen Reaktionspartner zur Umwandlung in elektrische Energie genutzt. Die Reaktionsprodukte verbleiben innerhalb der Zellen und führen zum Abbau der Potentialdifferenz (Entladung) zwischen den Polen. Die Energiespeicherfähigkeit von Batterien und Akkus ist daher begrenzt.

Dieser Nachteil wird bei chemischen Brennstoffzellen vermieden, weil hier die Reaktionspartner von außen kontinuierlich zugeführt werden. In Abb. 40 ist ein vereinfachtes Schema einer mit Wasserstoff und Sauerstoff betriebenen Brennstoffzelle dargestellt. Hier wird die elektrische Energie in der stark exothermen **Knallgas-Reaktion**

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

gewonnen, die jedoch in der Brennstoffzelle unter kontrollierten Bedingungen abläuft, um eine explosionsartige Energiefreisetzung zu vermeiden. Der Trick bei Brennstoffzellen ist die räumliche Trennung von Oxidations- und Reduktionsreaktion. Die Knallgas-Reaktion wird dabei durch eine geeignete Konstruktion der Brennstoffzelle aufgespalten in die *kathodische* Teilreaktion (Reduktion)

$$O_2 + 2H_2O + 4e^- \longrightarrow 4OH^-$$

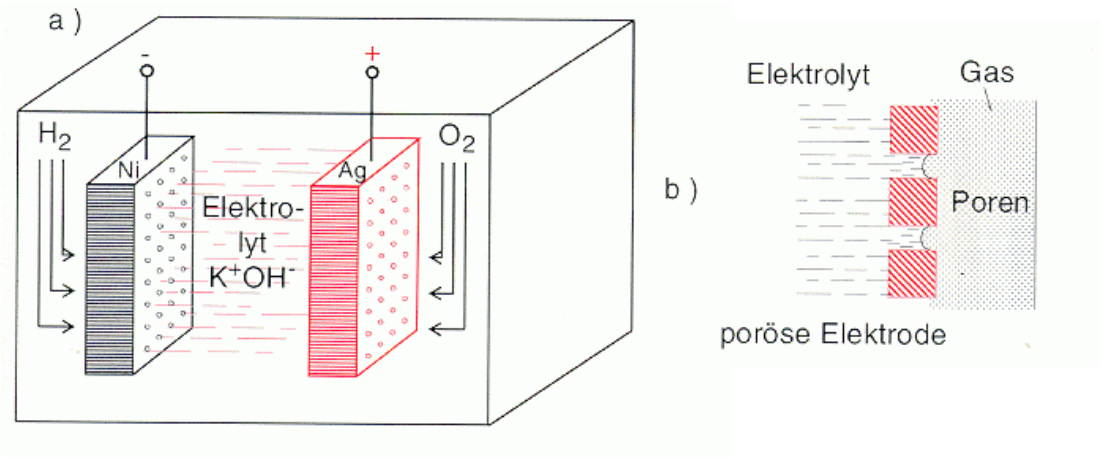


Abbildung 40: Brennstoffzelle mit H_2 und O_2 Zufuhr und Kalilauge als Elektrolyt

an der Ag Elektrode, welche je ein Elektron an die vier Reaktionsprodukte OH^- abgibt (Elektronenaufnahme = Reduktion) und die *anodische* Teilreaktion (Oxidation) an der Ni Elektrode

$$H_2 + 2OH^- \longrightarrow 2H_2O + 2e^- \quad ,$$

bei der pro OH^--Radikal ein Elektron abgegeben wird (Elektronenabgabe = Oxidation). Die Bezeichnung Anode und Kathode ist hier wie beim Akkumulator nicht sehr zweckmäßig, denn die Elektroden ("Ni-Anode") werden hier entsprechend der chemischen Reaktion bezeichnet!

Brennstoffzelle mit H_2 und O_2 Zufuhr und Kalilauge als Elektrolyt.

Für die beiden Reaktionen sind sowohl ein Katalysator als auch eine wäßrige Elektrolytlösung erforderlich. Deshalb kann die Reaktion nur an der Dreiphasengrenze von Gas, Elektrolyt und Katalysator ablaufen. Dies erfordert eine spezielle Struktur und geometrische Anordnung der Elektroden. Man verwendet z.B. poröse Elektroden, durch welche sowohl das zugeführte Gas (O_2 bzw. H_2) als auch der Elektrolyt eindringen können. Die Dreiphasengrenze entspricht dem Meniskus des Elektrolyten (Abb. 40 b) in den Poren der Elektrode, der sich beim Gleichgewicht zwischen Gasdruck und Flüssigkeitskapillardruck einstellt.

Dazu müssen die Poren einen passenden Durchmesser haben. Als Katalysator können z.B. Nickel für die H_2-Elektrode und Silber für die O_2-Elektrode verwendet werden.

Typische Leistungen solcher Brennstoffzellen sind 0.5 W pro cm^2 Elektrodenfläche bei einer Spannung von etwa 0.8 V. Man muß deshalb für den Einsatz zum Autoantrieb mehrere Zellen hintereinanderschalten, um eine für Antriebselektromotoren günstige Spannung zu erreichen.

Der Vorteil von Brennstoffzellen ist die direkte Umwandlung von chemischer Energie ohne den Umweg über die Wärmeenergie (wie das bei fossilen Kraftwerken notwendig ist). Deshalb entfällt hier die Begrenzung durch den Carnot-Wirkungsgrad.

Neben den alkalischen Brennstoffzellen, wurden auch weitere Arten von Brennstoffzellen entwickelt, wie z.B. die Proton-Exchange-Membran- (PEM)-Brennstoffzellen. Dabei ist das Kernstück die Proton leitfähige Membran (z.B. PTFE Polymere). Die Elektroden müssen gasdurchlässig sein und sind granulare Pt bzw. Pt/Ru Katalysatoren. An der Wasserstoffelektrode (hier als Anode bezeichnet, obwohl sie negativ geladen ist) wird Wassestoff anodisch oxidiert zu Protonen:

$$H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^-$$

An der Sauerstoffelektrode (Kathhode die aber positiv ist) wird Sauerstoff kathodisch reduziert und rekombiniert mit Protonen zu Wasser

$$O_2 + 4e^- \rightarrow 2O^{2-} \quad \text{Rekombination} \quad O^{2-} + 2H^+ \rightarrow H_2O$$

Das bisherige Hauptproblem ist die langsame *Vergiftung* des Katalysators durch geringe Verunreinigungen in den zugeführten Gasen. Inzwischen ist es jedoch gelungen, sehr langlebige und leistungsstarke Brennstoffzellen zu entwickeln, die in Verbindung mit einem Elektromotor eine interessante Alternative zum Benzin- oder Dieselmotor darstellen, weil sie als Abfallprodukt lediglich Wasser abgeben.

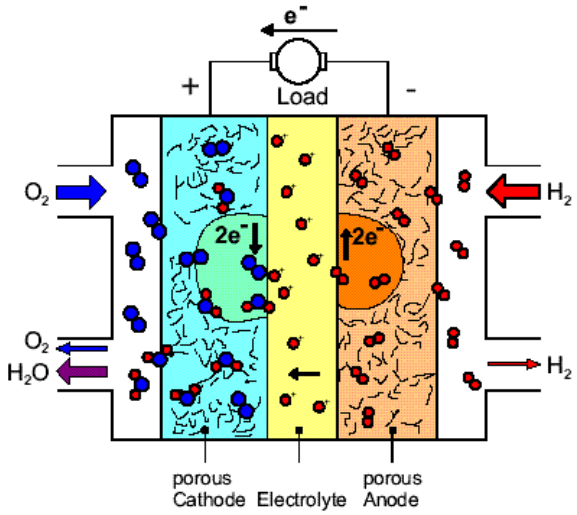


Fig. 1 Schematic drawing of a hydrogen/oxygen fuel cell and its reactions based on the proton exchange membrane fuel cell (PEMFC).

Abbildung 41: Proton Exchange Membrane Fuel Cell PEMFC

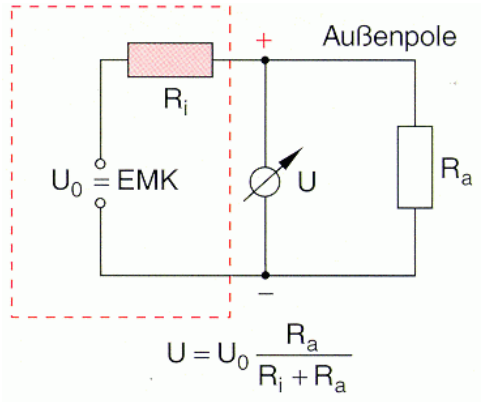


Abbildung 42: Zum Innenwiderstand einer Spannungs- bzw. Stromquelle.

6.4 Zum Innenwiderstand von Spannungs- und Stromquellen

Jede Spannungs- bzw. Stromquelle hat einen Innenwiderstand R_i, der daher kommt, daß die Ladungsträger beim Transport Stöße erleiden. Wenn die *Klemmenspannung* der unbelasteten Spannungsquelle U_0 ist (siehe Abb. 42, man nennt U_0 auch *elektromotorische Kraft EMK*), dann sinkt bei Belastung mit einem äußeren Lastwiderstand R_a die Klemmenspannung beim Strom $I = U_0/(R_i + R_a)$ auf den Wert:

$$U = U_0 - I.R_a = U_0(1 - \frac{R_i}{R_i + R_a}) = U_0 \frac{R_a}{R_i + R_a}$$

Die Klemmenspannung wird daher abhängig vom Verbraucherwiderstand. Mit entsprechender elektronischer Spannungsstabilisierung kann der Innenewiderstand sehr klein gemacht werden, sodaß die Klemmenspannung in einem weiten Bereich fast unabhängig von der Last R_a wird. $\Rightarrow$ *Spannungsquelle* (kleiner Innenwiderstand).

Für einen *Stromquelle*, bei der der Strom möglichst unabhängig vom Lastwiderstand sein sollte, wird der Innenwiderstand möglichst hoch gewählt werden.

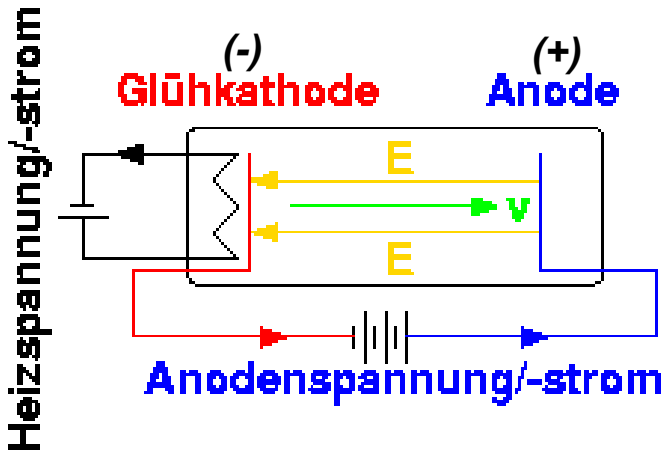


Abbildung 43: Elektronenröre, Vakuumdiode

7 Elektrischer Strom im Vakuum

Im Vakuum müssen zum Stromtransport freie Ladungsträger z.B. durch Emission von Elektronen aus glühendem Metall erzeugt werden. Dazu heizt man eine Elektrode (Glühkathode(-)) mit einem Heizstrom auf. Ihr gegenüber befindet sich im gleichen Vakuumgefäß die kalte Anode (+); zwischen beide Elektroden legt man eine Spannung, die den Anodenstrom bewirkt (Vakuumdiode, Abb. 43)

7.1 Elektronenemission aus Festkörpern

Bei der Erörterung des Energiebändermodells wurde bereits auf die Austrittsenergie oder Austrittsarbeit, d.i. die Energiedifferenz zwischen dem Ferminiveau und dem Potential der Festkörperoberfläche (= Vakuumniveau), hingewiesen. Damit Leitungselektronen aus dem Kristall austreten, muß man ihnen mindestens Energie entsprechend der Austrittsarbeit zuführen. Dies kann auf verschiedene Arten erreicht werden:

1. **Photoelektronenemission**

   Hallwachs beobachtete, daß mit ultraviolettem Licht aus einer Zinkplatte Elektronen heraus gelöst werden können (**Hallwachseffekt**; vorher bereits ähnliche Beobachtungen durch H. Hertz). Die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen ist umso größer, je kurzwelliger das UV-Licht ist; über einer gewissen Grenzwellenlänge konnten keine Elektronen emittiert werden. Die Erklärung folgt aus der **Einsteinschen Gleichung**:

   $$\frac{m_e \cdot v_e^2}{2} = h \cdot \nu - W_A \tag{24}$$

   (Elektronenenergie unabhängig von der Licht*intensität* !).

   Ein Lichtquant mit der Frequenz ν hat die Energie $h\nu$; ist diese größer als die Austrittsarbeit eines Elektrons im betreffenden Kristall, kann es zur Emission kommen, sonst nicht; die Restenergie des absorbierten Photons tritt als kinetische Energie des Elektrons wieder auf. Anwendungen dieses Photoeffekts in der Technik sind vor allem die Fotozelle (für sichtbares Licht werden Alkalimetallschichten verwendet).

2. **Thermische Emission**

   Bei hohen Temperaturen wird auch das Elektronengas eines Metalles aufgeheizt; die einzelnen Elektronen können damit leichter aus dem Metall austreten. Infolge ihrer Temperaturbewegung

haben nicht alle Elektronen dieselbe Energie, sondern weisen eine Geschwindigkeitsverteilung auf (Maxwell-Verteilung). Die Emission wird umso stärker sein, je höher die Temperatur und je kleiner die Austrittsarbeit ist. Der quantitative Zusammenhang wird durch die **Richardson-Dushman-Gleichung** gegeben:

$$j_s = A \cdot T^2 \cdot e^{-\frac{W_A}{kT}} \quad ; \tag{25}$$

$j_s \ldots$ Emissionssättigungsstrom, $A \ldots$ Dushman-Konstante (folgt aus der Fermistatistik $A \doteq 2 - 6 \cdot 10^5 \mathrm{A.m^{-2}.K^{-2}}$ für Einelektronen-Kristalle), $T \ldots$ Absolute Temperatur, $W_A \ldots$ Austrittsarbeit liegt im Bereich von 2-5eV, $k \ldots$ Boltzmann-Konstante; $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}, $kT(300K) =$ 25meV! .Wenn man an die aufgeheizte Metalloberfläche eine entsprechende Spannung anlegt, können die ausgetretenen Elektronen als Emmissionstrom gemessen werden. Ansonst bildet sich eine negative Raumladungswolke, die die ausgetretenen Elektronen wieder zurück in das Metall treibt.

Meist kann der Einfluß der Temperatur im quadratischen Glied gegenüber der exponentiellen Abhängigkeit vernachlässigt werden. Gute Elektronenemitter sollen nun einerseits eine möglichst niedrige Austrittsarbeit, andererseits einen möglichst hohen Schmelzpunkt haben. Die letzte Forderung führt dazu, daß man bei den reinen Metallen im allgemeinen hochschmelzende wie W, Ta oder Mo verwendet, obwohl ihre Austrittsarbeiten ziemlich groß sind.

3. **Schottky-Effekt**

   Erhöht man das beschleunigende E-Feld wesentlich über den Wert, der zur Messung des thermischen Sättigungsstromes notwendig ist, so wird bei Feldstärken oberhalb 10^5 V/m die Potentialschwelle an der Grenzfläche Metall/Vakuum merklich abgesenkt. Wenn an der Leiteroberfläche die Feldstärke E herrscht, so ist das Potential $\phi = E.x$ und die potentielle Energie des Elektrons wird um $\Delta E_{pot} = -eEx$ vermindert. $\Rightarrow$ Die Austrittsarbeit wird vermindert und der thermische Emmissionsstrom erhöht sich: $\Rightarrow$ Schottky-Effekt.

4. **Feldemission**

   Wenn an der Oberfläche eines Kristalls eine sehr hohe Feldstärke auftritt ($>10^9$ V/m, Spitzenelektrode, etc.), so ändert sich der Potentialverlauf so stark, daß aus der Potentialschwelle eine Potentialbarriere der Breite Δx und Höhe ΔE wird. Der quantenmechanische Tunneleffekt liefert eine merkliche Wahrscheinlichkeit, daß Elektronen aus dem Kristall durch diese Barriere durchtunneln können. Der Emissionsstrom ist umso größer, je kleiner die Austrittsarbeit und je höher die Feldstärke ist.

5. **Sekundärelektronenemission**

   Elektronen können aus Kristallen auch gelöst werden, indem man Elektronenstrahlen auf die Oberfläche schießt; ein auftreffendes Elektron kann entweder reflektiert werden oder in das Kristallgitter eindringen und dort ein Elektron herausschlagen; der Quotient aus der Zahl der von der Oberfläche wegfliegenden Elektronen und der auf die Oberfläche auftreffenden Elektronen heißt **Sekundärelektronenemissionskoeffizient**. Er hängt von der Kristallart, vom Auftreffwinkel und von der Elektronenenergie ab und hat für eine Primärelektronenenergie zwischen 500 und 1000 eV bei Metallen Werte zwischen 0.5 und 1.5 und bei Isolatoren und Halbleitern bis zu 20.

   Die Sekundärelektronenemission wird vor allem bei Sekundärelektronenvervielfachern (SEV; *Multiplier*) angewendet, wo hintereinander angeordnete gut emittierende Flächen mit einer dazwischen liegenden Beschleunigungsspannung zur Elektronenstrom-Multiplikation beitragen; diese Multiplier werden zur Photonen- oder Teilchenzählung in vielen Bereichen der experimentellen Physik angewendet.

7.2 Raumladungsgesetz

In einer Anordnung mit Kathode (Minuspol), die Elektronen emittiert und Anode (Pluspol) fließt bei Anlegen einer Spannung nicht der volle Sättigungsstrom, sondern im allgemeinen ein wesentlich geringerer. Dieser infolge der Raumladung begrenzte Strom hängt von der Geometrie der Anordnung und

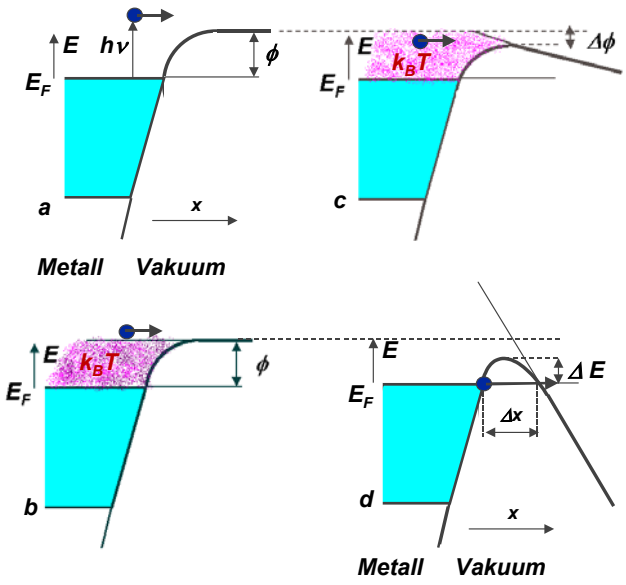


Abbildung 44: Photoeffekt (a), Thermoemission (b), Schottkyeffekt (c), Feldemission (d)

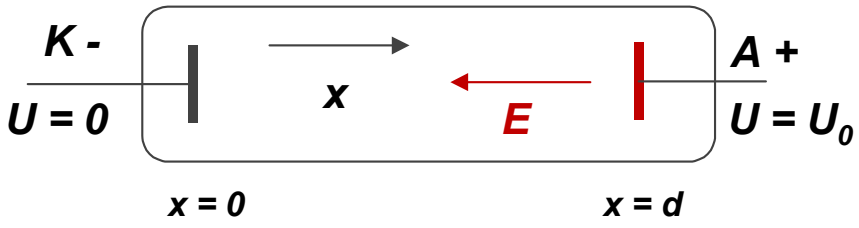


Abbildung 45: Zur Ableitung des Raumladungsgesetzes

von der Spannung zwischen Kathode und Anode ab. Wir wollen für den einfachsten ebenen Fall (siehe Abb.45) den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom für Elektronen (das sog. Raumladungsgesetz) aufstellen.

Da Ladungen zwischen Anode und Kathode vorhanden sind, gilt die Poissongleichung, die mit folgenden Randbedingungen zu lösen ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon_0} \quad ; \qquad U(0) = 0 \ , \qquad U(d) = U_0.$$

Vereinfachte Ableitung des Raumladungsgesetzes: Wir behandeln die Verhältnisse von Abb.45 als eindimensionales Problem:

$E \quad = \quad E(x)$ (wenn keine Raumladung vorhanden ist $E = konst. \ \Rightarrow U(x) = \int E.dx = Ex + C \Rightarrow \frac{U_0}{d}x$)

$U \quad = \quad U(x)$

$$\left.\begin{array}{lcll} n & = & n(x) & \ldots \text{Ladungsträgerdichte} \\ v & = & v(x) & \ldots \text{Geschwindigkeit der Ladungsträger} \end{array}\right\} j = konst.$$

Für einen stationäre Ladungsdichte ($\partial\rho/\partial t = 0, \ \Rightarrow \text{div}\ \vec{j} = 0$) folgt aus der Kontinuitätsgleichung, daß die Stromdichte $j = konst.$ für alle x ist ! Im Vakuum ergibt sich die Geschwindigkeit der Ladungsträger nach dem Energiesatz aus der durchfallenen Spannung $U(x)$:

$$\frac{m \cdot v^2(x)}{2} = e \cdot U(x) \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{2e}{m} \cdot U} \ . \tag{26}$$

Für die Stromdichte erhalten wir somit:

$$j = e \cdot n \cdot v = e \cdot n \cdot \sqrt{\frac{2e}{m} \cdot U} \quad . \tag{27}$$

Die Strom-Spannungskennlinie des *homogenen* Feldes im Vakuum hat somit eine $\sqrt{U}$-Abhängigkeit, wenn es nur sehr wenige Ladungen enthält. Das entspricht nun allerdings selten der Realität. Entweder ist Materie (mindestens Gas) vorhanden, worin die Ladungsbewegung nicht ungebremst erfolgt, oder man hat ein hinreichendes Vakuum und muß dann die Ladungsträger von außen zuführen, meist von der Kathode aus (Glühkathode, Photokathode). Dann ist es aber mit der Homogenität des Feldes vorbei; das kann so weit gehen, daß am Erzeugungsort, der Kathode, gar kein Feld mehr anliegt, sondern daß es schon vorher durch Raumladungen ausgeglichen wird. Man spricht dann von einem **raumladungsbegrenzten Strom**.

In der Vakuumröhre ist der Strom praktisch immer (in Festkörpern manchmal - besonders in Halbleitern) raumladungsbegrenzt. Die Ladungsträgerkonzentration n ist unter diesen Umständen ortsabhängig. Sie regelt sich von selbst auf die bereits oben erwähnte Bedingung ein, daß die Stromdichte überall gleich ist. Wäre das nicht der Fall, so würde sich dort, wo z.B. ein großes j in ein kleines übergeht, Ladung anhäufen; diese zusätzliche Raumladung würde das Feld im dahinterliegenden Raum so weit abschirmen, daß j dort absinkt, bis es sich dem allgemeinen Niveau angepaßt hat. Dieser Ausgleichsvorgang hört erst auf, wenn ein durch $j = konst.$ gekennzeichnetes Quasigleichgewicht herrscht; $j = e \cdot n \cdot v = konst.$ bedeutet aber $n \sim 1/v$: Wo wenige Träger sind, fliegen sie entsprechend schneller.

Andererseits werden in Gebieten hoher Ladungsträgerkonzentrationen viele Feldlinien verschluckt, wodurch sich das Feld dort stark ändert. Diesen Zusammenhang beschreibt die Poisson-Gleichung:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} = \frac{dE}{dx} \quad .$$

Wir untersuchen nun den *raumladungsbegrenzten Fall*, wo an der Kathode kein Feld ankommt: $E_{kath} = 0$. An der Anode herrscht das volle Feld: $E_{an} \approx U/d$. Wenn dieses Feld auf der Länge d abgebaut wird, ist seine räumliche Änderung *annähernd*:

$$\frac{dE}{dx} \approx \frac{E_{an}}{d} \approx \frac{U}{d^2} \quad .$$

Die Poisson-Gleichung lautet dann *angenähert*:

$$\frac{E_{an}}{d} \approx -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}; \qquad \vec{j} = \rho.\vec{v} \approx \varepsilon_0.\vec{v}\frac{U}{d^2} \quad .$$

Damit erhalten wir für die Stromdichte mit $v = \sqrt{2eU/m}$:

$$j \approx \varepsilon_0 \cdot v \cdot \frac{U}{d^2} = \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{U^{3/2}}{d^2} \quad ,$$

Die exakte Rechnung unterscheidet sich von unserem Näherungsausdruck nur um den Faktor 4/9. Der abgeleitete Zusammenhang wird als **Child-Langmuirsches Raumladungsgesetz** bezeichnet.

In Abb. 46 ist der Potentialverlauf zwischen Kathode und Anode für die Fälle ohne und mit Emission im Vergleich dargestellt. Durch die Raumladung der Elektronen wird das Potential vor der Kathode solange erniedrigt, bis die Feldstärke an der Kathode gerade 0 ist (Austrittsgeschwindigkeiten der Elektronen 0 angenommen); währenddessen wäre der Potentialverlauf ohne Emission natürlich linear.

Die Stromleitung im Vakuum (Elektronenröhre) wird durch dieses Raumladungsgesetz noch nicht vollständig beschrieben. Bei $U = 0$ sollte demnach der Strom verschwinden. Er tut es aber nicht ganz; sogar bei schwachen Gegenfeldern (bis annähernd 1 V) kommt noch etwas Strom an, und zwar um so mehr, je heißer die Glühkathode ist (auf den Child-Langmuirschen Teil hat die Kathodentemperatur dagegen keinen Einfluß). Bei diesem sog. **Anlaufstrom** handelt es sich um Elektronen, die nach dem Austritt aus der Kathode genügend thermische Energie haben, um auch gegen ein schwaches Gegenfeld anzulaufen. Die Anlaufstromkennlinie ist ein Abbild des hochenergetischen "Schwanzes" der Maxwell-Verteilung. Sie wird beherrscht durch den (Boltzmann-)Faktor $e^{-\frac{e \cdot |U|}{kT}}$:

$$j_{ANL} = j_S \cdot e^{-\frac{e \mid U \mid}{kT}} \quad .$$

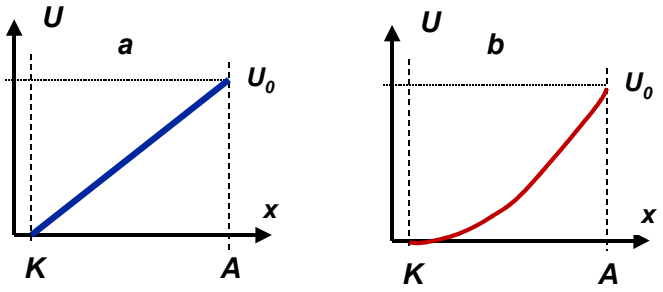


Abbildung 46: Spannungsverlauf ohne Raumladung (a), mit Raumladung (b)

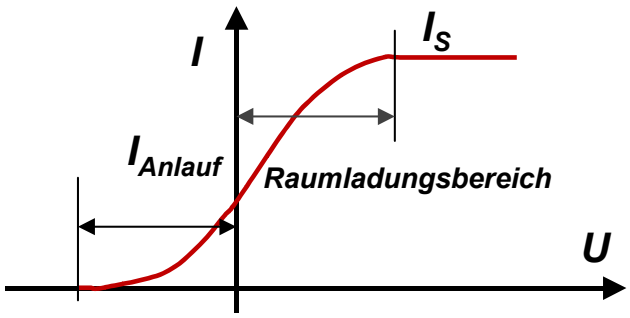


Abbildung 47: Strom-Spannungsverlauf einer Elektronenröhre

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man die Kathodentemperatur bestimmen.

Abb. 47 zeigt die Gebiete des Anlaufstrombereichs, des Raumladungsbereichs sowie des Sättigungsbereichs, bei dem die $U^{3/2}$-Kennlinie für große Anodenspannungen in einen horizontalen Teil übergegangen ist. Der **Sättigungsstrom** ist umso höher, je heißer die Kathode ist, ist aber von der Anodenspannung selbst unabhängig. Er kommt so zustande, daß das hohe Feld alle Ladungsträger absaugt, welche die Kathode liefern kann, ohne daß sich der raumladungsbildende Stau vor der Kathode ausbildet. Die Temperaturabhängigkeit des Sättigungsstroms entspricht dem Gesetz von Richardson und Dushman. Analoge Verhältnisse stellen sich auch beim Transport von Ionen im Vakuum ein.

7.3 Elektronenröhren

Eine (heute teilweise bereits historische) Anwendung der unipolaren Elektronenströmung im Vakuum sind die Elektronenröhren. Dabei kann durch Einführung weiterer Elektroden zwischen Anode und Kathode (sog. Gitter) der raumladungsbegrenzte Elektronenstrom gesteuert werden, indem an die Gitter variable Spannungen angelegt werden; am einfachsten sind die Verhältnisse bei der Triode, welche nur ein Gitter (Steuergitter) besitzt.

Abb. 49 zeigt die typische Schaltung einer Triode, das Steuergitter wird negativer als die Kathode betrieben, was den großen Vorteil hat, daß damit einerseits Steuerwirkung, andererseits aber verschwindender Gitterstrom und damit leistungslose Steuerung erzielt wird. Abb. 49 zeigt auch das Anodenstrom-Anodenspannung-Kennlinienfeld einer solchen Triode (statische Kennlinie) mit der Gitterspannung als Parameter; durch Anlegen einer Wechselspannung am vorgespannten Gitter und Bestimmung von Anodenspannung und Anodenstrom, welche daraus resultieren, ergibt sich die dynamische oder Betriebskennlinie.

Elektronenröhren wurden mit bis zu 7 Gittern hergestellt; sie sind heutzutage durch die Transistoren stark zurückgedrängt worden, behaupten aber auf gewissen Gebieten (z.B. bei der Sendertechnik, bei verlangter hoher Ausgangsleistung) noch ihren Platz; auch die Oszillographen-Bildröhren, die Fernsehbildröhren und moderne Röntgenröhren sind Hochvakuum-Elektronenröhren für spezifische Zwecke.

Röhren ohne Gitter (Dioden) wurden früher häufig zur Gleichrichtung verwendet, sind aber heute

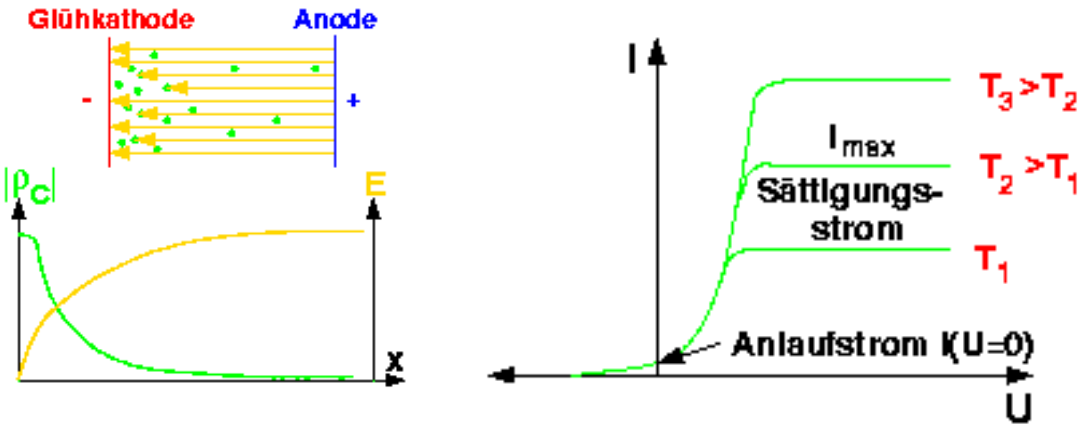


Abbildung 48: Ladungsdiche und E-Feld in einer Vakuumr öhre

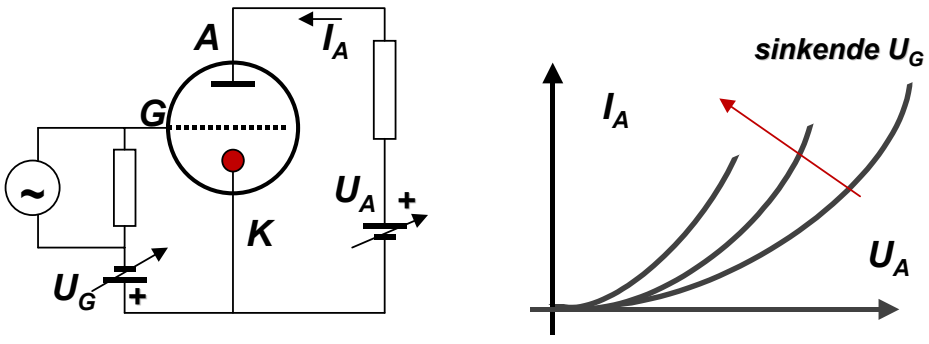


Abbildung 49: Triode und deren Strom- Spannungskennlinie

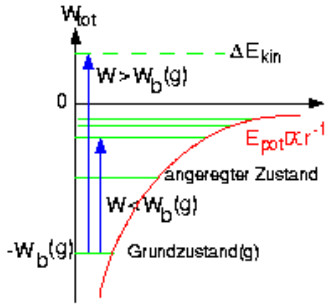


Abbildung 50: Elektronenzustände im Potentialtopfmodell, W_b Bindungsenergie im Grundzustand

durch Halbleiterdioden praktisch vollkommen ersetzt.

8 Elektrischer Strom im Gas, elektrische Gasentladung

Die Stromleitung in Gasen wird durch freie Ladungsträger (Elektronen, Ionen) verursacht, die auf verschiedenste Weise erzeugt werden können. Man bezeichnet das *Auftreten eines el. Stromes im Gas als Entladung.* Man unterscheidet:

- Unselbständige Entladung: Es werden die freien Ladungsträger von außen erzeugt. Quellen dafür sind hohe Temperaturen (heiße Metalloberflächen, Flammenentladung); Teilchenstrahlung (radioaktive Quellen, Höhenstrahlung), elektromagnetische Strahlung (UV- und γ-Strahlung)
- Selbständige Entladung: Es werden die freien Ladungsträger durch das elektrische Feld erzeugt

8.1 Ionisationsmechanismen

Positive Ionen entstehen dadurch, daß durch irgendeinen der im folgenden angeführten Mechanismen einem Atom ein oder mehrere Hüllenelektronen entfernt werden. Bedingung für Ionisation ist, daß die zugeführte Energie W größer ist als die Bindungsenergie des Grundzustandes (Abb.50); ist $W < W_b$, so kann das Elektron in der Atomhülle nur angeregt werden. Der angeregte Zustand ist instabil, nach kurzer Zeit wird das Elektron in den Grundzustand unter Emmission von Licht zurückkehren. ($W_b(He) = 24,6$ eV, $W_b(Ne) = 21,6$ eV, $W_b(Ar) = 15,8$ eV, $W_b(H) = 13,6$ eV)

Die zusätzliche Anlagerung von Elektronen und damit die Bildung negativer Ionen ist ebenfalls möglich. Man mißt die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmter Prozeß in atomaren Dimensionen eintreten kann mit dem *Wirkungsquerschnitt*, d.i. jene gedachte Fläche, welche ein Teilchen einem Reaktionspartner darbieten müßte, damit die Reaktion mit der tatsächlich gemessenen Häufigkeit auftritt; typische Wirkungsquerschnitte für Ionisationsreaktionen liegen in der Gegend von $10^{-20}\,\mathrm{m}^2$. Folgende Prozesse führen zur Ionisation von Atomen oder Molekülen:

1. **Elektronenstoß**

   Elektronen treffen auf Gasteilchen auf; wenn die Elektronenenergie die Bindungsenergie übersteigt, wird Ionisation möglich, d.h. das Elektron löst ein Hüllenelektron ab, und ein positives Ion bleibt zurück. Der Wirkungsquerschnitt ist abhängig von der Elektronenenergie. Der Elektronenstoß ist in Gasen meist der wirksamste Ionisationsprozeß, er gehört allgemein zu den inelastischen Stoßprozessen; beim **Versuch von Franck und Hertz** wurde erstmal die Ionisierung durch Elektronenstoß im Quecksilberdampf eindrucksvoll demonstriert.

2. **Ionenstoß**

   Trifft ein Ion auf ein neutrales Atom, so sind je nach der Energie der Reaktionspartner im gemeinsamen Schwerpunktsystem zwei Prozesse möglich; entweder wird das neutrale Atom ionisiert, oder es findet Ladungsaustausch statt, d.h., das stoßende Ion übernimmt das vom Neutralatom

abgelöste Elektron. Bei allen derartigen Prozessen müssen natürlich stets die Erhaltungssätze gelten. Außerdem muß die Gesamtladung der Reaktionspartner erhalten bleiben.

3. **Photoionisation**

   Wenn die Energie eines Lichtquants größer als die Ionisationsenergie eines Atoms ist, so kann dieses auch durch Einwirkung von elektromagnetischer Strahlung ionisiert werden; sichtbares Licht reicht dazu nicht aus.

4. **Thermische Ionisation**

   In sehr heißen Gasen treffen die unter 1., 2., und 3. angeführten Ionisationsprozesse derart zusammen, daß dann die Dichte der Neutralteilchen gegenüber der Ionendichte vernachlässigbar wird. Man kann dann den Ionisationsgrad eines derartigen heißen Gases (nach Langmuir auch **Plasma** genannt) mit thermodynamischen Methoden berechnen.

5. **Rekombinationsprozesse**

   Diese zur Ionisation inversen Prozesse können sowohl zwischen Einzelteilchen (Volumsrekombination bei Plasmen), als auch zwischen Ionen und Festkörperoberflächen stattfinden (Wandrekombination).

8.2 Elektrische Gasentladungen

Wenn in einem Gas ein elektrisches Feld herrscht, so werden vorhandene Ladungsträger (es sind immer infolge der Höhenstrahlung geringe Ladungsträgerkonzentrationen vorhanden) beschleunigt und können ihrerseits weitere Ionisationsprozesse hervorrufen. Dadurch entstehen zusätzlich Ladungsträger, welche wieder beschleunigt werden; je nach den Gegebenheiten tritt eine mehr oder weniger lawinenartig (Multiplikation) steigende Ladungsträgerkonzentration auf, was zum sog. **Durchbruch** führt: Das Gas wird elektrisch mehr oder weniger gut leitend. Der Ladungsträgermultiplikation wirken die Rekombinationseinflüsse entgegen und es bildet sich bei einer elektrischen Gasentladung je nach den Gegebenheiten ein für diese typischer Gleichgewichtszustand aus. Diese Erscheinungen sind äußerst vielfältig und bilden zusammen mit den elektromagnetischen Wirkungen bei Gasentladungen das Gebiet der **Plasmaphysik** (man versteht unter Plasma allgemein ein Gas, das soweit ionisiert ist, daß seine makroskopischen und mikroskopischen Eigenschaften dadurch wesentlich beeinflußt werden).

Man kann versuchen, in das Gebiet der elektrischen Gasentladungen anhand von Abb. 51 etwas Systematik zu bringen.

Wir haben ein Entladungsgefäß, in dem sich verdünntes Gas befinden möge; mit Hilfe einer einstellbaren Spannungsquelle und einem regelbaren Vorwiderstand kann jede beliebige Strom-Spannungskombination eingestellt werden; wir unterscheiden dann im wesentlichen (je nach Entladungsgefäßdimensionen, Kathodenmaterial und Größe, Gasdruck und Gasart bei verschiedenen Strom- und Spannungswerten) folgende Erscheinungen (Abb. 51):

- **A) UNSELBSTÄNDIGE ENTLADUNG**

- **Rekombinationsbereich:** Vereinzelte Multiplikationserscheinungen, die aber nicht zu einer stationären Entladung führen. Linearer Stromanstieg (Ohmscher Bereich): Die durch die Prozesse 1-4 entstandenen Ladungsträger erhalten eine Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D = e\tau\vec{E}/m$. Auf dem Weg zu den Elektroden können sie rekombinieren. Die Zahl der Rekombinationen hängt von der Zeit zwischen Entstehung und Ankunft auf den Elektroden ab und sinkt daher mit steigendem $\vec{E}$. Ist die Zahl der pro Zeiteinheit auf die Elektroden auftreffenden Ladungsträger klein gegen die Rekombinationsrate, so wird das Gleichgewicht zwischen Erzeugungs- und Rekombinationsrate nicht wesentlich gestört und man hat eine stationäre Ladungsträgerkonzentration n_{stat}. Dies führt zu $\vec{j} = n_{stat}\, q(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}$; somit gilt das Ohmsche Gesetz. Steigt die Spannung weiter sinkt die Rekombinationsrate, da $\vec{v}_D$ zunimmt und die Zeit zur Rekombination abnimmt.

- **Sättigungsbereich** des Stromes, wenn alle gebildeten Ladungsträger die Elektroden erreichen bevor sie rekombinieren.

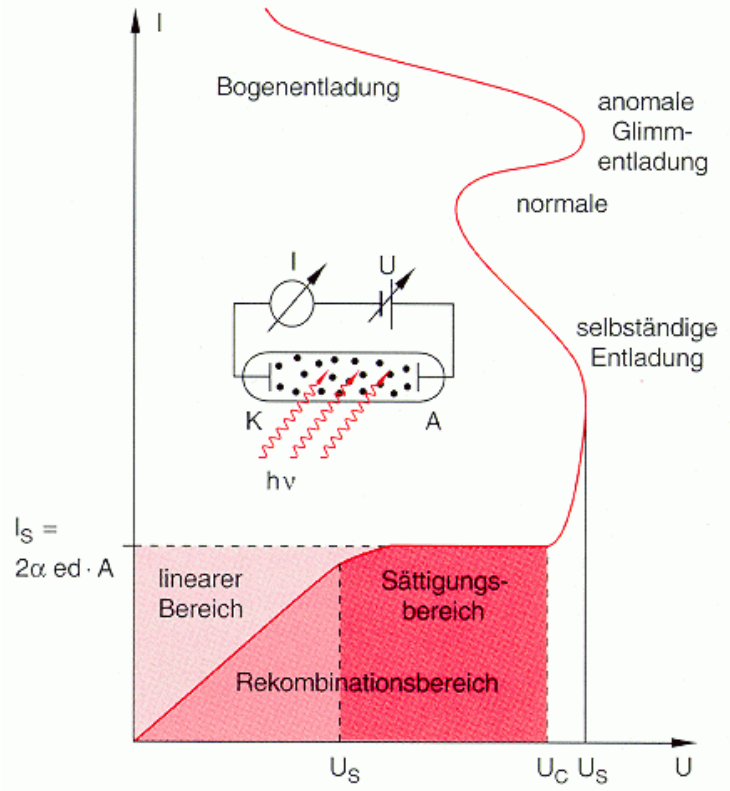


Abbildung 51: Strom-Spannungscharakteristik eines ionisierten Gases

- **Stoßionisationsbereich:** Erreicht die Spannung den kritischen Wert U_C so erhalten die Ladungsträger innerhalb der mittleren Stoßzeit genügend Energie, um beim Stoß mit neutralen Atomen diese zu ionisieren. ⇒ starker Stromanstieg im Bereich der *unselbständigen* Entladung $dI/dU > 0$.

- **B) SELBSTÄNDIGE ENTLADUNG:** Oberhalb der Zündspannung $U_Z = U_S$ tritt *selbständige* Gasentladung auf. U_Z hängt von der Elektrodenform und Gasdruck ab. Bei höheren Spannungen ist die Gasentladung meist mit Emission von Licht verbunden, wobei die Farbe (Frequenz) des Lichtes von dem verwendeten Gas abhängt. Die Gasatome werden durch die Stöße angeregt, beim Rücksprung in den Grundzustand emittieren sie für das Atom charakteristisches Licht.

- **Dunkelentladung,** sog. **Townsendentladung**: Pro ursprünglich vorhandenem Elektron entstehen im Gas durch Ionisationsprozesse soviele Ladungsträger, daß eine Entladung aufrecht erhalten werden kann. Die Anzahl der freien Ladungsträger und ihr Energiegewinn während der Stoßzeit reichen noch nicht für deutliche Lichtemission aus. Dann tritt Stromverstärkung auf: erstmals eine negative Charakteristik $dI/dU < 0$, d.h. hier entstehen bereits soviele Ladungsträger, daß der Strom trotz sinkender Spannung ansteigt; in diesem Gebiet werden z.B. Zählrohre für ionisierende Strahlung betrieben.

- **Normale Glimmentladung** ist mit deutlicher Lichtemission verbunden: die auf die Kathode aufprallenden Ionen schlagen Sekundärelektronen heraus, welche ihrerseits zur Ionisation des Gases beitragen. Mit steigendem Strom tragen immer größere Teile der Kathode zur Lieferung von Sekundärelektronen bei, die Kathode wird im zunehmenden Maße mit einer Glimmhaut überzogen, bis auch dieser Prozeß nicht mehr ausreicht; es entsteht dann der Übergang zur

- **Anomale Glimmentladung:** die Spannung muß wieder ansteigen, damit die auf die Anode zufliegenden Elektronen öfter ionisieren können; es entstehen im zunehmenden Maße Dunkel-

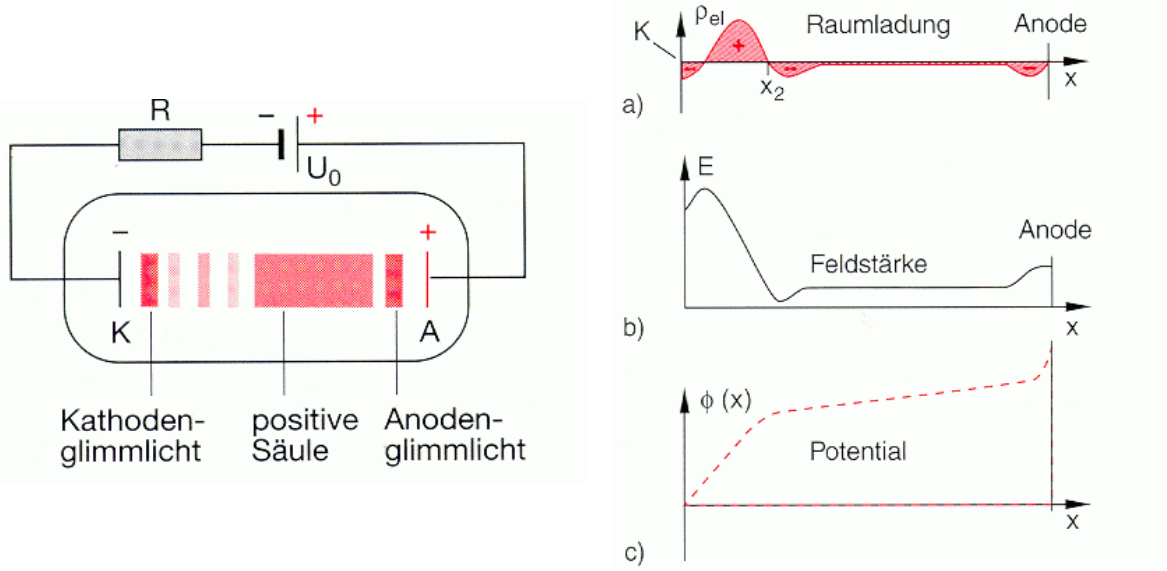


Abbildung 52: Leuchterscheinungen in einer Glimmenetladung; Raumladungsverlauf (a) Feldstärke (b) und Potential (c) in einer Glimmentladung.

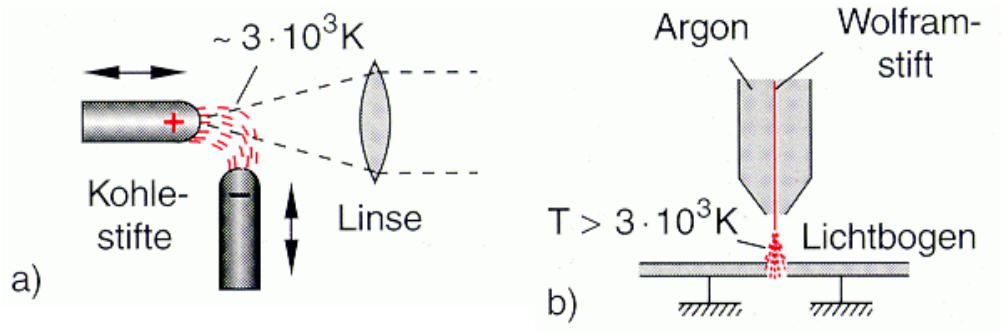


Abbildung 53: Kohlenbogenlampe (a), Bogenentladung beim Schweißen (b).

räume, d.s. Bereiche, in denen die Elektronen mittels erhöhter Spannungsgradienten beschleunigt werden.

- **Bogenentladung** ist bei hoher Stromdichte mit großer Lichtintensität verbunden. Wenn die Ionen mit genügen Energie und Intensität auf die Kathode auftreffen, kann diese so aufgeheizt werden, daß sie thermisch Elektronen emittiert. Die Entladung wird zur **Bogenentladung** (Abb. 53) und zeichnet sich nun durch besonders hohen Strom bei niedriger Entladungsspannung aus.

.

Bei Glimm- und Bogenentladung unterscheidet man neben den diversen Dunkelräumen in der Entladung vor allem drei Bereiche:

Kathodenfall: Erster Dunkelraum; die von der Kathode emittierten Elektronen werden erstmals zum Erreichen der Ionisationsfähigkeit beschleunigt, der Spannungsgradient ist deshalb dort ziemlich groß.

Positive Säule: Hier sind Ionen und Elektronen nebeneinander vorhanden, es handelt sich um ein typisches Plasma, in dem Quasineutralität herrscht, da jede Abweichung von derselben sofort hohe Feldstärken hervorruft, die dieser Abweichung entgegen wirken. Die positive Säule zeigt auch die für die jeweilige Gasart typische Lichtaussendung und dient daher Beleuchtungszwecken, z.B. bei den Leuchtstofflampen, bei denen diese Strahlung auf einen an der Innenseite des Entladungsgefäßes angebrachten

fluoreszierenden Belag auftrifft. In der positiven Säule ist der Spannungsgradient sehr klein, ein derartiges Plasma ist also praktisch ein Äquipotentialgebilde.

Anodenfall: Gebiet mit erhöhtem Spannungsgradienten zwecks Nachlieferung von fehlenden Ladungsträgern, manchmal aber auch gar nicht vorhanden oder gar mit einer abfallenden Spannung.

Die Anwendungen elektrischer Gasentladungen sind überaus vielfältig: Sie dienen neben Beleuchtungszwecken (Bogenlampen, Leuchtstofflampen, Hochspannungsglimmlampen für Reklamezwecke, Hochdrucklampen für hohe Lichtausbeute) auch elektrischen Schalt- und Gleichrichterzwecken (Thyratron, Quecksilberdampfgleichrichter), sowie zur Erzeugung von Ionen für Technik und Wissenschaft. Historisch waren Gasentladungen die Quellen von Elektronenstrahlen ("Kathodenstrahlen") und Ionenstrahlen ("Kanalstrahlen"); Ionenstrahlen finden Anwendung für Ionentriebwerke und zur Beschleunigung von Ionen in der experimentellen Physik.

Bei sehr hohen Temperaturen sind die Atome vollständig ionisiert, d.h. das "Gas" besteht nur aus Elektronen und Ionen, die nicht mehr rekombinieren. Diesen Zustand bezeichnet man als **Plasma**, dessen Eigenschaften wesentlich verschieden von denen des Gases (Flüssigkeit & Festkörper) sind. Man kann ein Plasma als einen vierten Aggregatzustand der Materie auffassen.

Die für die Zukunft vielleicht wesentlichste Anwendung von Ionenstrahlen bzw. plasmaphysikalischen Erscheinungen betrifft die **thermonukleare Fusion**, wo man bemüht ist, derart heiße Plasmen zu erzeugen, daß die einzelnen (in diesem Falle vollkommen ionisierten) Atome miteinander Kernreaktionen eingehen können. Thermonukleare Fusion kann dann als Energiequelle dienen, wenn das Produkt aus Ionendichte und Plasmaeinschlußdauer bei einer für Kernfusionsprozesse günstigen Plasmatemperatur ($\geq$ 100 Millionen K) den Wert von etwa 10^{21} m^{-3} .s überschreitet (Lawson-Kriterium).

9 Statische Magnetfelder

Bereits im Altertum wurde beobachtet, daß bestimmte Mineralien, die in der Nähe der Stadt Magnesia in Kleinasien gefunden wurden, Eisen anzogen. Daher nannte man sie Magnete und nutzte sie in Form von Kompaßnadeln zur Navigation. Eine befriedigende Erklärung dieser Permanentmagnete erfolgte erst mit Hilfe der modernen Festkörperphysik.

Bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts gab es keine Veranlassung, zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen Gemeinsamkeiten zu sehen. Auf der einen Seite waren die durch elektrische Ladungen und galvanische Ströme hervorgerufenen Erscheinungen bekannt, auf der anderen Seite sog. magnetische Wirkungen, die Kompaßnadel, das irdische Magnetfeld und die magnetischen Eigenschaften gewisser Eisenerze.

Um 1820 hat Oersted nachgewiesen, daß ein elektrischer Strom eine Kompaßnadel beeinflußt, also ein magnetisches Feld hervorruft. Dies war der Ausgangspunkt aller klassischen Theorien der elektromagnetischen Erscheinungen, welche vor allem auf die Arbeiten von Ampère, Faraday und Maxwell aufgebaut waren. Um 1890 entdeckte Hertz elektromagnetische Wellen, welche auch mit der Maxwellschen Theorie erklärt werden konnten. Auch die spezielle Relativitätstheorie wurde zur Klärung der elektromagnetischen Erscheinungen bei bewegten Ladungen herangezogen; Arbeiten von Lorentz über diese Erscheinungen mündeten schließlich 1905 in die grundlegende Arbeit von Einstein über die "Elektrodynamik bewegter Körper".

Es wird im folgenden gezeigt, daß die Erscheinungen des Magnetismus bei konsequenter Anwendung der speziellen Relativitätstheorie zwanglos aus elektrischen Erscheinungen folgen. Auch der Magnetismus in Materie wird auf bewegte Ladungen im atomaren Bereich zurückgeführt. Wesentlich ist, daß Elektrizität und Magnetismus nicht zwei wesensverschiedene Dinge sind. In der Magnetostatik ist es manchmal vorteilhaft, sie unterschiedlich zu behandeln. Diese Tatsache spiegelt sich primär auch in den verwendeten Maßsystemen wider. Man kann entweder von den elektrischen Erscheinungen ausgehen und die magnetischen daraus folgern oder umgekehrt, oder man kann formal auch an der Eigenständigkeit beider festhalten, wodurch sich die Dimension des Maßsystems um eins erhöht.

.

9.1 Magnetische Dipole; Polstärke

Die bekannten Versuche der Sichtbarmachung magnetischer Feldlinien eines Permanentmagneten mit Eisenpulver zeigen, daß alle bisher untersuchten Permanetmagnete Dipole sind. Dabei wird jener Pol

des Stabmagneten als magnetischer Nordpol (der andere als magnetischer Südpol) bezeichnet, der bei frei drehbarer Aufhängung nach Norden zeigt, also zum magnetischen Südpol. Weiters zeigt sich, daß sich gleichnamige Pole abstoßen und ungleichnamige anziehen, analog zur Elektrostatik. Das Analogon zur Ladung Q in der Elektrostatik ist die magnetische Polstärke p in der Magnetostatik.

Zur Bestimmung von p kann eine Anordnung analog zur Coulombschen Drehwaage (Abb.55) verwendet werden, um die Kraft zwischen zwei Polen p_1 und p_2 im Abstand r zu bestimmen.

$$\vec{F} = f\ \frac{p_1 \,.p_2}{r^2}\hat{r} \tag{28}$$

Die Proportionalitätskonstante hängt von der Wahl des Maßsystems ab; im CGS System ist $f = 1$; im SI System wird ihre Größe durch den Vergleich mit den magnetischen Kräften zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern definiert und erhält damit analog zur Elektrostatik:

$$f = \frac{1}{4\pi\mu_0} \qquad \text{mit} \qquad \mu_0 = 4\pi\,.10^{-7}\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}$$

μ_0... magnetische Permeabilitätskonstante. Damit ergibt sich für die magnetische Polstärke

$$[p] = 1\mathrm{V}\,.\mathrm{s}$$

Trotz dieser Analogie zur Elektrostatik hat man bis jetzt keine magnetischen Monopole gefunden, weder durch Teilung (Abb. 55b) noch bei einem anderen Experiment. Dies hat auch für die magnetischen Feldlinien die Konsequenz, daß sie immer in sich geschlossen sind (sie laufen im Magnet weiter).

Analog zum elektrischen Feld kann man die **magnetische Feldstärke** $\vec{H}$ der Polstärke p_1 eines Stabmagneten definieren als den Grenzwert

$$\vec{H} = \lim_{p_2 \to 0} \frac{\vec{F}}{p_2} \tag{29}$$

d.h. die die Polstärke des Probemagneten muß sehr klein gegen den Feldmagnet sein. Die Dimension (SI) von H ergibt sich aus den Gleichungen 28 und 29

$$[H] = 1\,\mathrm{A/m}\ = \frac{\mathrm{Am}}{\mathrm{Vs}}\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2}$$

Wegen der formalen Analogie zur Elektrostatik wurde $\vec{H}$ als magnetische Feldstärke bezeichnet, obwohl sich später herausstellte, daß zur Beschreibung von Magnetfeldern insbesonders in der Elektrodynamik die **magnetische Induktion** oder auch **magnetische Flußdichte** $\vec{B}$ die primäre Größe ist. Im Vakuum gilt:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$

In manchen Lehrbüchern wird nun B als magnetische Feldstärke und H als magnetische Erregung bezeichnet, obwohl die obige Bezeichnung die SI Definition ist. Aus der Dimension von μ_0 ergibt sich die Dimension von B :

$$[B] = 1\,\mathrm{Vs/m}^2 = 1\,\mathrm{Tesla} = 1\,\mathrm{T}$$

Im CGS System haben B und H gleiche Dimension aber unterschiedliche Bezeichnungen $[B] = 1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\mathrm{T}$; $[H] = 1\mathrm{Oe} = \frac{1000}{4\pi}\mathrm{A/m} \simeq 80\,\mathrm{A/m}$.

Das Erdmagnetfeld liegt im Bereich von 20 - 50 μT; 50 μT = 0,5 G $\doteq$ 0,5 Oe = 39,81 A/m; im Luftspalt eines konventionellen Elektromagneten erreicht man etwa 2,5T, in supraleitenden Magneten bis zu 23 T.

9.2 Magnetfelder stationärer Ströme

Daß magnetische Kräfte etwas mit bewegten elektrischen Ladungen zu tun haben müssen, sehen wir ganz einfach aus der Tatsache, daß ein Stabmagnet und ein stromdurchflossener Leiter einander beeinflussen. Parallele stromführende Leiter beinflussen sich ebenfalls: fließen die Ströme in gleicher Richtung, so ziehen einander die Leiter an, anderenfalls stoßen sie sich ab. Wenn zwischen die beiden Leiter ein (nicht magnetisierbares) Abschirmungsblech gebracht wird, ändert sich gar nichts; es kann sich also nicht um Coulombsche Kräfte handeln.

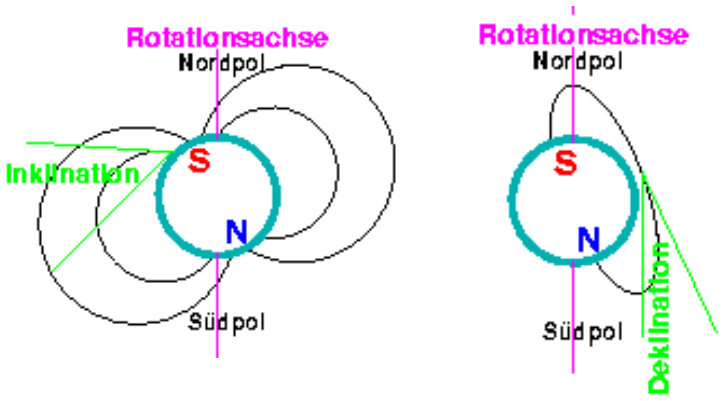


Abbildung 54: Die Lage der magnetischen und geometrischen Pole der Erde stimmen nicht überein; der magnetische S üdpol befindet sich in der Nähe des geometrischen Nordpoles.

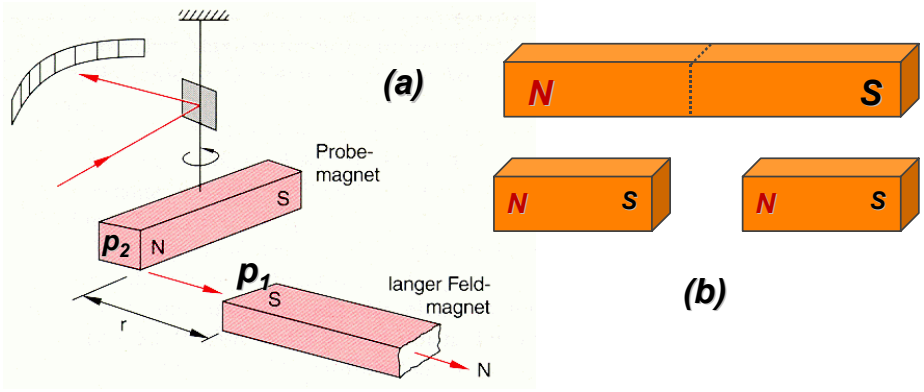


Abbildung 55: Magnetische Drehwaage zur Bestimmung von $\vec{F}$ zwischen den Magnetpolen (a), es wurden bisher keine magnetischen Monopole gefunden (b).

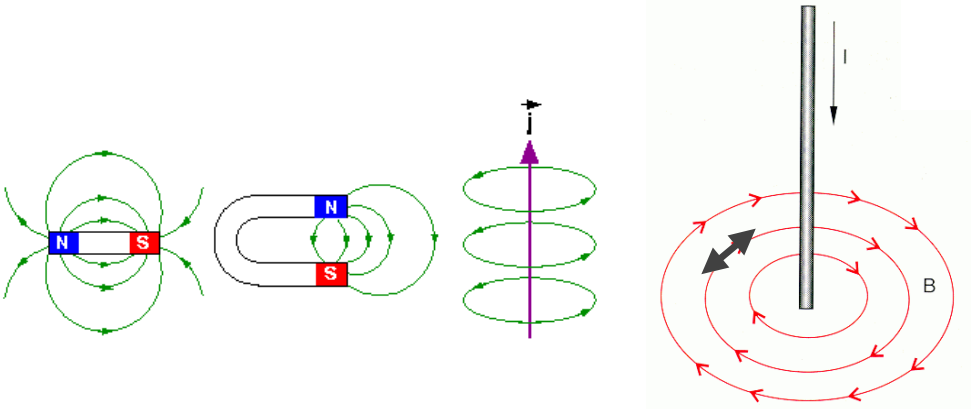


Abbildung 56: Stabmagnet und stromdurchflossener Leiter

Das konzentrische Magnetfeld um einen stromführenden geraden Leiter kann mit einer Kompaßnadel bzw. mit Fe Pulver nachgewiesen werden (Abb. 56). Schaut man in Richtung von I, so entspricht die Richtung von $\vec{B}$ oder $\vec{H}$ einer Rechtsschraube.

Eine stromdurchflossene zylindrische Spule erzeugt ein magnetisches Dipolfeld, das dem eines Stabmagneten entspricht. Verwendet man bei der magnetischen Drehwaage Spulen statt der Stabmagneten, so findet man ein äquivalentes Verhalten. An den Enden der Spule ergibt sich ein Nord- bzw. Südpol (Abb. 57), die sich bei Stromumkehr vertauschen. Die Feldlinien sind geschlossene Kurven. Zur Berechung von B werden noch einige Begriffe eingeführt.

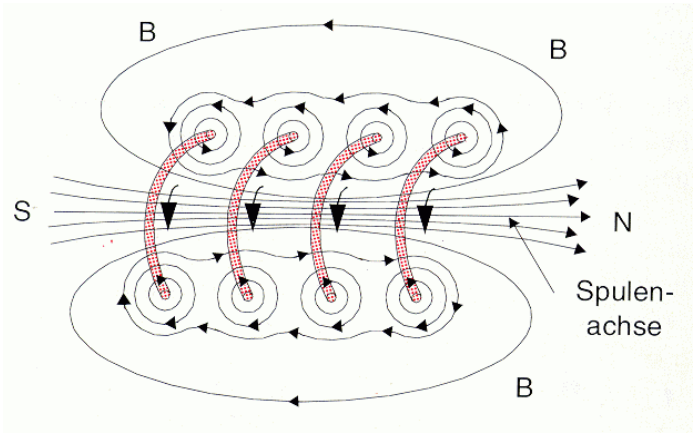


Abbildung 57: Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule

9.2.1 Magnetischer Fluß, magnetische Spannung und Ampèresches Gesetz

Analog zum elektrischen Fluß $\Psi = \Phi_{el} = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ definieren wir den **magnetischen Fluß**

$$\boxed{\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad [\Phi] = 1\text{V.s} \; = 1\text{T/m}^2}$$

der ein Maß für die Zahl der Feldlinien durch eine Fläche ist.

Da alle Feldlinien geschlossen sind, folgt sofort (Abb. 58), daß der gesamte magnetische Fluß durch eine *geschlossene* Oberfläche, die das Volumen V umgibt, Null sein muß, denn es treten genau so viele

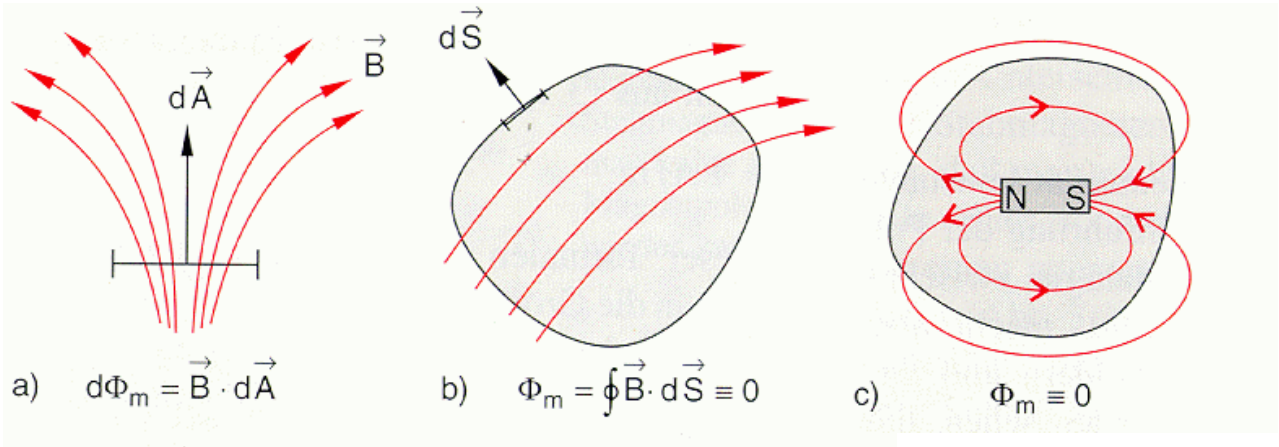


Abbildung 58: Der magnetische Fluß Φ durch eine geschlossene Fläche S ist Null.

Feldlinien ein wie aus. $\rightarrow$

$$\oint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Aus dem Gaußschen Satz ergibt sich:

$$\oint_{A(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\vec{B}.dV = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0} \tag{30}$$

Dies ist die mathematische Formulierung, daß es *keine magnetischen Monopole* gibt! Nord- und Südpol (d.h. Quellen und Senken) sind untrennbar verbunden (im Gegensatz zur Elektrostatik, wo bei Anwesenheit von Ladungen gilt: $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \neq 0$). Das **$\vec{B}$-Feld ist quellenfrei**; dies gilt immer, während die analoge Beziehung für $\vec{H}$ nur im Vakuum gilt.

In der Elektrostatik ergibt das Linienintegral $\int \vec{E} \cdot d\,\vec{s} = U = \phi_1 - \phi_2$ die Spannung und das Ringintegral über einen geschlossenen Weg ist $\oint \vec{E}.d\,\vec{s} = 0$. Analog zur Elektrostatik bezeichnet man $\int \vec{H}.d\,\vec{s} = U_m$ als *"magnetische Spannung"* U_m, obwohl das Integral die Dimension 1 A hat.

Ampèresches Gesetz: Man findet *experimentell* (Abb.59) für das Ringintegral $\oint \vec{H} \cdot d\,\vec{s} = I$, wenn der geschlossene Integrationsweg im Magnetfeld $\vec{H}$ eine Fläche A umschließt, die von einem Strom I durchflossen wird.

$$\boxed{\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\,\vec{s} = I \quad \text{bzw.} \quad \oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\,\vec{s} = \mu_0 I} \tag{31}$$

Mit $\int \vec{j} \cdot d\vec{A} = I$ und dem Stokesschen Satz ergibt sich

$$\mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint_{C(A)} \vec{B} \cdot d\,\vec{s} = \int_A \mathrm{rot}\vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\, \vec{j} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}} \tag{33}$$

Die magnetische Spannung $\oint \vec{H} \cdot d\,\vec{s}$ kann auf verschiedene Weise gemessen werden:

- Man führt den Pol eines langen Stabmagneten mit der Postärke p im *Halbkreis* um einen stromdurchflossenen Leiter (Abb. 59a) und mißt die je nach Umlaufsinn gewonnene oder aufzubringende Arbeit:
$$W = \frac{1}{2} p \oint \vec{H} \cdot d\,\vec{s} = \frac{1}{2} p\, I$$
- Windet man eine dünne flexible Spule mit n Windungen um einen Leiter, so wird beim Einschalten des Stromes I eine Induktionsspannung gemessen, die proportional zu $\oint \vec{H} \cdot d\,\vec{s} = n\, I$ ist (Abb. 59b, $\rightarrow$ Induktionsgesetz)

Mit dem Ampèreschen Gesetz und dem magnetischen Fluß lassen sich die Felder spezieller Stromverteilungen leicht berechnen.

9.2.2 Magnetfeld eines geraden Leiters

Wie aus Abb. 56 ersichtlich ist, sind die Feldlinien eines stromdurchflossenen geraden Leiters konzentrische Kreise, auf denen jeweils $\left|\vec{H}\right| = konst.$ gilt. Auf einem kreisförmigen Integrationsweg (Abb. 60) mit dem Radius $r > r_0$ um den zylindrischen Leiter mit Radius r_0 erhält man bei Verwendung von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\,\vec{s} &= \int_0^{2\pi} H.\,r.\,d\varphi = 2\pi.r.H = I \quad \rightarrow \\ H(r) &= \frac{I}{2\pi\, r} \qquad \text{bzw.} \qquad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r} \end{aligned} \tag{34}$$

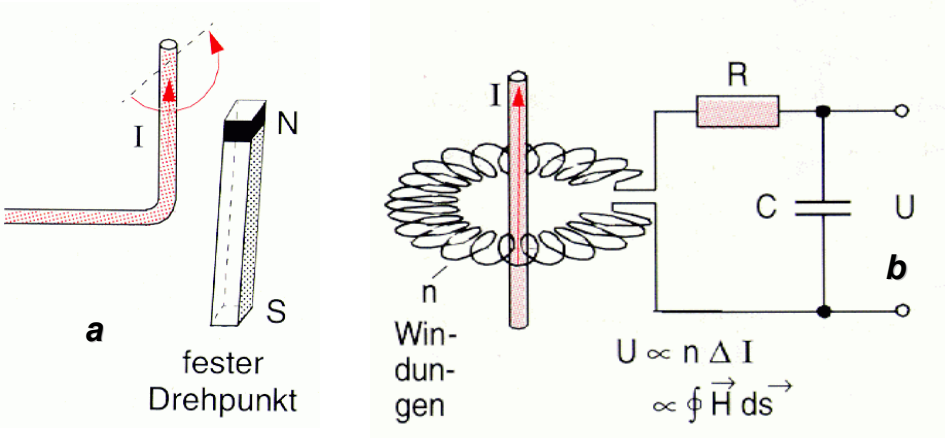


Abbildung 59: Messung der magnetischen Spannung mit einem langen Stabmagneten (a) und einer Induktionspule (b): beim Einschalten des Stromes wird in der Spule eine Spannung induziert, die am Kondensator eine Stromänderung bewirkt.

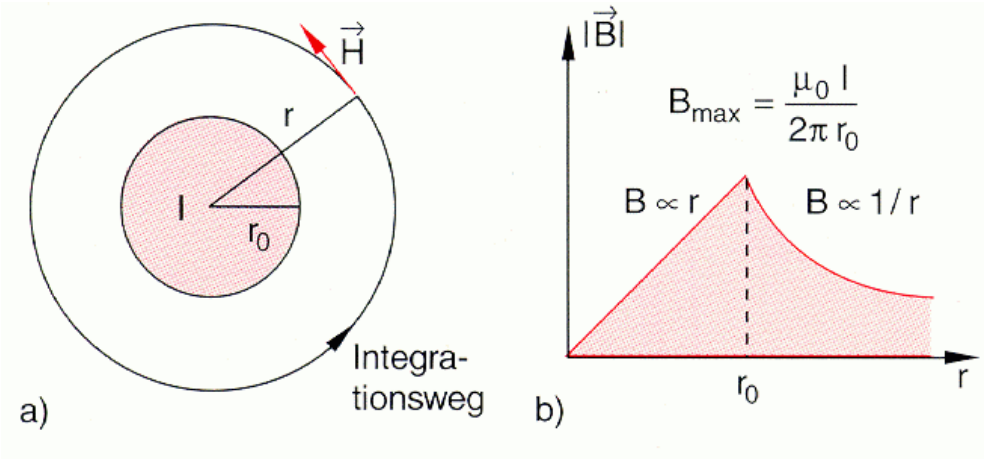


Abbildung 60: Integrationweg entlang kreisförmiger Feldlinien (a) und Feldstärke als Funktion des Abstandes r von der Drahtmitte (b)

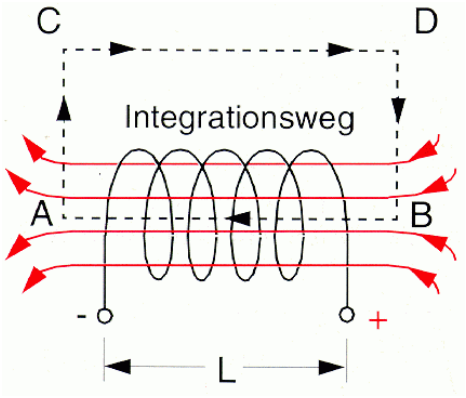


Abbildung 61: Integrationsweg zur Bestimmung des Spulenfeldes.

Für einen Integrationsweg innerhalb des Leiters wird nur der Teil $r'^2\pi j$ des Gesamtstromes umschlossen, daher ist für $r' < r_0$:

$$\begin{aligned} 2\pi.r'.B &= \mu_0 r'^2 \pi j \quad \rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 j}{2} r' \\ B(r') &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2} r' \end{aligned} \tag{35}$$

$B(r)$ hat den größten Wert an der Oberfläche $r = r_0$ des stromführenden Drahtes, siehe Abb.60.

9.2.3 Magnetfeld im Inneren einer langen Spule

Aus dem Feldlinienbild einer Spule mit N Windungen (Abb. 57) ist ersichtlich, daß das Feld im Inneren praktisch homogen und im Außenraum vernachlässigbar klein ist, insbesonders dann, wenn der Durchmesser der Spule mit n Windungen pro Meter klein gegen die Spulenlänge L ist. Wir integrieren über den gestrichelten Weg in Abb. 61. Nur die Strecke $\overline{AB}$ im Inneren liefert einen merklichen Beitrag, da die Strecke $\overline{CD}$ außen beliebig weit weg gewählt werden kann und auf den Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ das Feld $\vec{B}$ in guter Näherung senkrecht zu $d\vec{s}$ ist.

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} &= H\,L = NI \quad \rightarrow \\ H &= nI \quad \text{bzw.} \quad B = \mu_0\, nI \end{aligned} \tag{36}$$

mit $n = N/L$. Das Feld im Inneren ist bei dieser Vereinfachung homogen und nur vom Strom und von der Windungzahl pro Längeneinheit abhängig. (Daher kommt auch der Name "Amperewindung" für H).

Beispiel: $n = 10^3$, $I = 10\,\text{A}$, $\rightarrow H = 10^4$ A/m, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ Vs/Am $= 1{,}26.10^{-6}$ Vs/Am, $\rightarrow$ $B = 0{,}0126\,\text{T} = 126\,\text{G}$.

9.3 Das Vektorpotential

In der Elektrostatik wurde gezeigt, daß das Potential allgemein bei Kenntnis der Ladungsverteilung und daraus zumindest numerisch das elektrische Feld $\vec{E} = -\nabla\phi(\vec{r})$ berechenbar ist. Die Frage ist, ob das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$, bzw. ein noch zu definierendes "magnetisches Potential" bestimmt werden kann, wenn die Stromverteilung bekannt ist.

Aus dem Ampereschen Gesetz folgt, daß $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \neq 0$ ist, wenn der Integrationsweg eine stromdurchflossene Fläche umschließt. In solchen Fällen ist das Ringintegral nicht mehr unbedingt unabhängig vom Integrationsweg und man kann deshalb nicht mehr ein "magnetisches Potential" ϕ_m durch die Definition "$\vec{B} = -\nabla\phi_m$" eindeutig bestimmen, da dann "$\text{rot}\vec{B} = -\mu_0\,\text{rot}(\nabla\phi_m) \equiv 0$" im Widerspruch zu $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$ stehen würde.

Da $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ gilt, kann ohne Widerspruch eine vektorielle Feldgröße $\vec{A}(\vec{r})$ durch die Relation

$$\boxed{\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}} \tag{37}$$

definiert werden, die als Vektorpotential des Magnetfeldes bezeichnet wird. Dadurch wird automatisch $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ erfüllt, weil immer gilt:

$$\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) \equiv 0$$

Durch die Definitionsgleichung $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ ist das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ noch nicht völlig festgelegt, weil z.B. auch ein anderes Vektorpotential

$$\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}f\,(\vec{r})$$

mit einer beliebigen skalaren Ortsfunktion $f(\vec{r})$, wegen $\mathrm{rot.grad}f\,(\vec{r}) \equiv 0$, ebenso wie von $\vec{A}$ die Bedingung $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ erfüllt. Man muß daher noch eine Zusatzbedingung (sogenannte Eichbedingung) an $\vec{A}$ stellen. Für den Fall stationärer, d. h. *zeitunabhängiger* Felder wählt man

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \qquad \textbf{Coulomb-Eichung}} \tag{38}$$

was sich als zweckmäßig erweisen wird [3]. Dadurch ist $\vec{A}(\vec{r})$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Daher wählt man genau wie beim elektrischen Potential, daß $\vec{A}(\vec{r})$ im Unendlichen Null wird. Die beiden Definitionsgleichungen für das Vektorpotential sind somit für *zeitunabhängige* Probleme lauten:

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{B} \quad \text{und} \quad \mathrm{div}\vec{A} = 0} \tag{39}$$

9.4 Das magnetische Feld einer beliebigen Stromverteilung, Biot-Savartsches Gesetz

Es wird gezeigt, daß das Vektorpotential aus einer gegebenen Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ in analoger Weise bestimmt werden kann wie das skalare elektrische Potential $\phi_{el}(\vec{r})$ aus $\rho(\vec{r})$.

Aus $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$ und $\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{B}$ ergibt sich

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0\,\vec{j} = \nabla.(\nabla\vec{A}) - (\nabla.\nabla)\vec{A}$$

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\,\vec{j}(\vec{r}) \tag{40}$$

Da $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ und $(\nabla.\nabla)\vec{A} = \Delta\vec{A}$. In Komponentenschreibweise ist dies

$$\Delta A_i = -\mu_0 j_i \qquad i = x, y, z: \qquad \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = -\mu_0\,j_x,\ \ \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} = -\mu_0\,j_y,\ \ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_0\,j_z$$

Es ist zu beachten, daß die drei Komponentengleichungen mathematisch äquivalent zur Poissongleichung $\Delta\phi_{el} = -\rho/\varepsilon_0$ sind, wenn die Stromdichtekomponente durch die Ladungsdichte (und μ_0 durch $1/\varepsilon_0$) ersetzt wird. Daher müssen auch die Lösungen äquivalent sein, und wir erhalten für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}_1)$ im Punkt $P(\vec{r}_1)$ die Vektorgleichung

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2).dV_2}{r_{12}}} \tag{41}$$

mit $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Dabei erfolgt die Integration über das gesamte stromführende Voumen V_2 (siehe Abb. 62).

Ist das Vektorpotential einer Stromverteilung bekannt, kann aus $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$ das Feld $\vec{B}(\vec{r}_1)$ im Punkt $P(\vec{r}_1)$ berechnet werden. Dabei ist zu beachten, daß die Differentiation nach den Koordinaten $\vec{r}_1$ des

[3] Einschränkungen bezüglich des Potentials bezeichnet man als "Eichung". Man kann auch eine andere Eichung wählen , z. B. die Lorenz Eichung. Der Vorteil der Flexibilität bei der Eichung ist, daß man jene Eichung wählt, die die Lösung des Problems einfacher macht. Für zeitabhängige Probleme $\Rightarrow$ Lorenz Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$

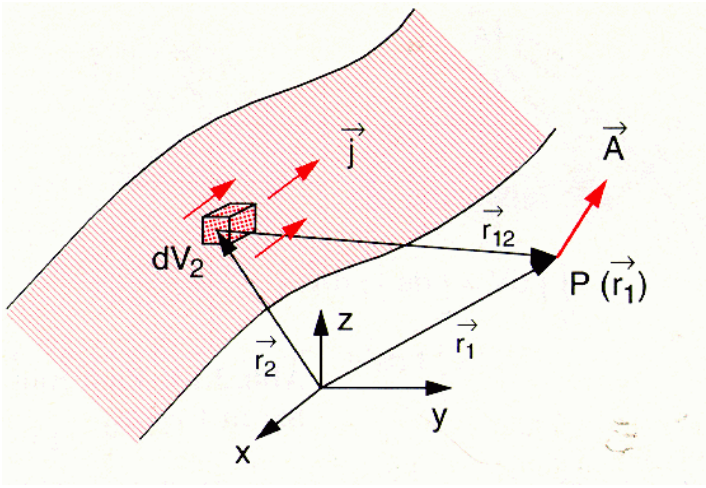


Abbildung 62: Zum Vektorpotential einer Stromverteilung

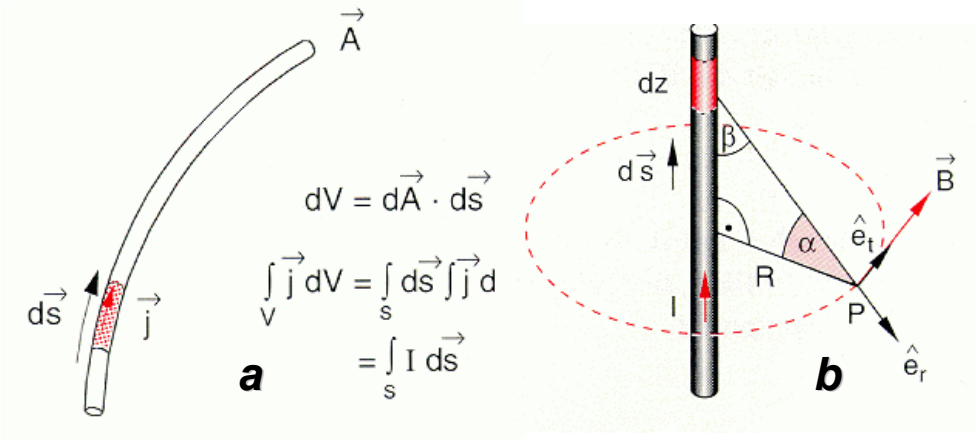


Abbildung 63: Zum Biot-Savart-Gesetz (a), zur Berechnung von Magnetfeld und Vektorpotential eines langen Leiters (b).

Aufpunktes P, die Integration jedoch über das Volumen dV_2 der stromführenden Gebiete erfolgt. Damit ergibt sich:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}_2).dV_2}{r_{12}}$$

Mit $r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ und $\nabla(1/\vec{r}) = -\vec{r}/r^3$ und dem Einheitsvektor $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ erhält man:

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$$

Fließt der Strom nur in dünnen Drähten (Abb. 63a), so ist $\vec{j}.dV = \vec{j}.d\vec{A}.d\vec{s} = I.d\vec{s}$, da der Integrand $\vec{j}$ auf der Querschnittsfläche $\vec{A}$ annähernd konstant ist. Damit ergibt sich das **Biot-Savartsche Gesetz (BS)** als Linienintegral über den stromführenden Weg

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}} \tag{42}$$

9.5 Beispiele zur Berechnung von Magnetfeldern spezieller Stromanordnungen

9.5.1 Magnetfeld eines geraden Leiters

Das Magnetfeld im Punkt $P(\vec{R})$ eines langen stromführenden Drahtes in z -Richtung (Abb. 63b) wird mit dem BS Gesetz berechnet. Das Vektorprodukt hat den Betrag

$$|d\vec{s}_2 \times \vec{r}_{12}| = \sin\beta.dz = \cos\alpha.dz$$

und die Richtung von $\hat{e}_t$, wobei der Einheitsvektor $\hat{e}_t$ in der $x-y$ Ebene Tangente an den Kreis mit Radius R ist. Damit ist

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\cos\alpha}{r^2}dz$$

Wegen $r = R/\cos\alpha$, $z = R.\tan\alpha \;\rightarrow\; dz = Rd\alpha/\cos^2\alpha$ folgt für den Betrag von $\vec{B}$ das bereits bekannte Ergebnis

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\alpha.d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{43}$$

Berechnung des Vektorpotentials: Die Richtung von $\vec{A}$ kann sofort angegeben werden, denn die Stromdichte hat nur eine $z-$Komponente, somit kann auch das Vektorpotential nur in z-Richtung zeigen $\vec{A} = \{0, 0, A_z\}$. Aus

$$B = \nabla \times \vec{A} = \hat{x}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \hat{y}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \hat{z}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) \quad \text{folgt}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y},\;\; B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x},\;\; B_z = 0$$

Geht man zu Zylinderkoordinaten (R, φ, z) über, so erhält man mit

$$(\nabla \times A)_R = \frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z};\quad (\nabla \times A)_\varphi = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R};\quad (\nabla \times A)_z = \frac{1}{R}\frac{\partial (RA_\varphi)}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}$$

$$B_R = \frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}, \qquad B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial R}$$

Weil A_z wegen der Zylindersymmetrie nicht von φ abhängt, ist $\partial A_z/\partial\varphi = 0 \;\rightarrow\; B_R = 0$. Damit kann mit $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ das Vektorpotential $A_z(R)$ des stromführenden Drahtes berechnet werden:

$$\begin{aligned} B &= B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \\ A_z(R) &= -\int B.dR = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R}{R_0} \end{aligned}$$

In Abb. 64 ist der Vergleich von elektrischem Potential eines Stabes mit der Ladungsdichte $\lambda = dQ/dz$ und dem Vektorpotential eines stromführenden Drahtes dargestellt, um die Analogie zwischen beiden Fällen zu verdeutlichen.

9.5.2 Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife

Liegt die Stromschleife in der x-y-Ebene (Abb. 65), dann hat $\vec{B}$ aufgrund $\vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$ in der Schleifenebene nur eine z-Komponente, deren Betrag im Aufpunkt $P_1(x, y, 0)$ wegen $|d\vec{s} \times \hat{r}_{12}| = \sin\varphi.d\vec{s}$ den Wert

$$B_z = \vec{B}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\sin\varphi}{r_{12}^2}ds \quad \text{hat.}$$

Im Mittelpunkt des Kreises ist $r_{12} = R$ und $\varphi = \pi/2$, sodaß man dort erhält:

$$B_z(Mittelpunkt) = \frac{\mu_0 I}{2R} \tag{44}$$

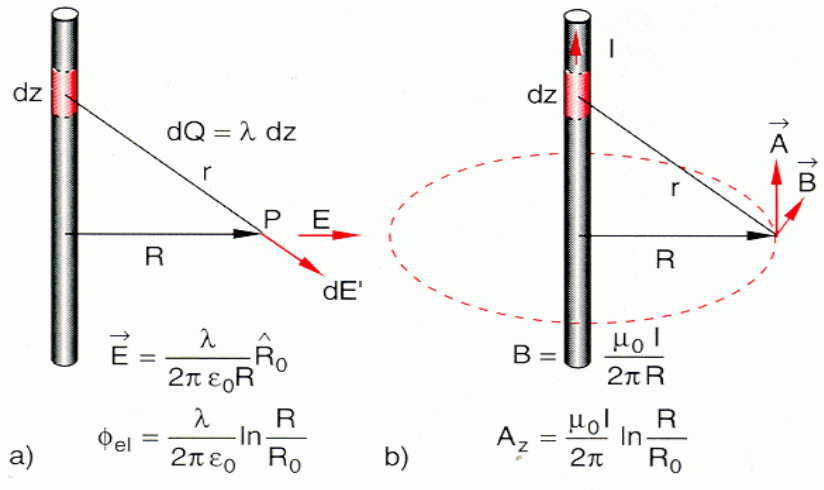


Abbildung 64: Vergleich zwischen dem elektrischen Potential $\phi(R)$ eines geladenen Drahtes mit der Linienladungsdichte λ (a) und dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ eines stromführenden Drahtes (b).

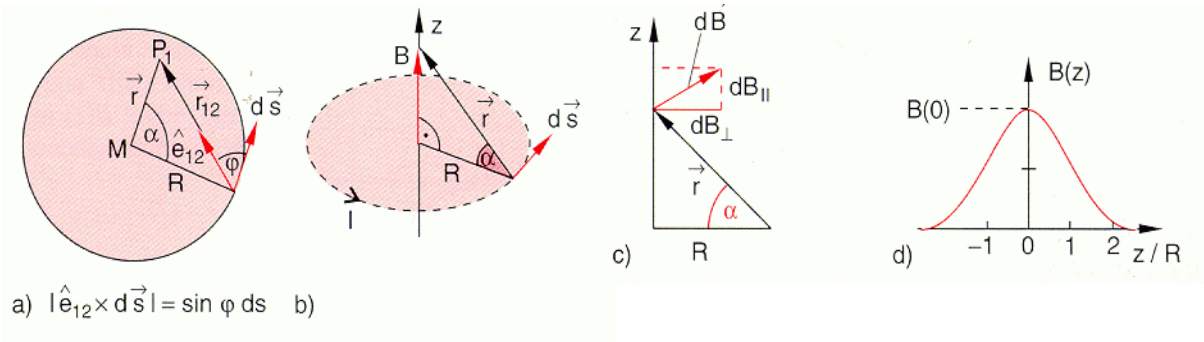


Abbildung 65: Zur Berechnung des Feldes einer Stromschleife

Eine Windung mit $R = 1\,\text{mm}$ und $1\,\text{A}$ erzeugt im Mittelpunkt $500\,\text{A/m}$ bzw. $6{,}3.10^{-4}\,\text{T} = 6{,}3\,\text{G}$.

Auf der *Symmetrieachse* (z-Achse) erhalten wir den Beitrag des Wegelementes $d\vec{s}$ zum Feld:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad |d\vec{s}\times\vec{r}| = ds\frac{R}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad \left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\cos\alpha\, r^3}ds$$

Bei der Integration über alle Wegelemente mitteln sich die Komponenten $dB_\perp = dB\sin\alpha$ heraus. Es bleibt nur die Parallelkomponente $dB_\parallel = dB\cos\alpha$ über, die bei Integration ergibt:

$$B_\parallel = B_z = \int \left|dB_\parallel\right| = \int |dB|\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{1}{r^3}R.ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3}R.2\pi R \tag{45}$$

mit $r^2 = R^2 + z^2$ folgt daraus

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I.R^2\pi}{2\pi(z^2+R^2)^{3/2}} \tag{46}$$

Der Feldverlauf $B_z(z)$ auf der *Symmetrieachse* ist in Abb. 65d dargestellt. Für Punkte außerhalb ist die Berechnung schwieriger → elliptische Integrale. Der Feldverlauf von B_z in der Schleifenebene ist in Abb. 66 als Funktion des Abstandes r vom Mittelpunkt dargestellt. Das Feldlinienbild gleicht dem eines kurzen Stabmagneten.

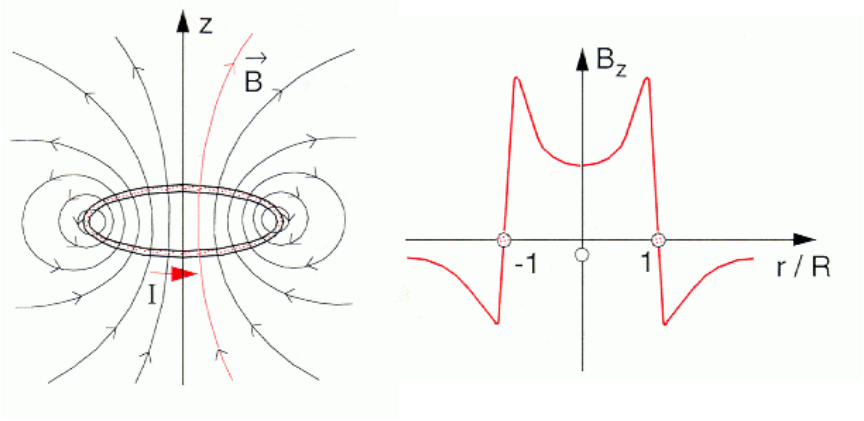


Abbildung 66: Feldliniene einer Stromschleife und Verlauf von $B(z)$ in der Schleifenebene.

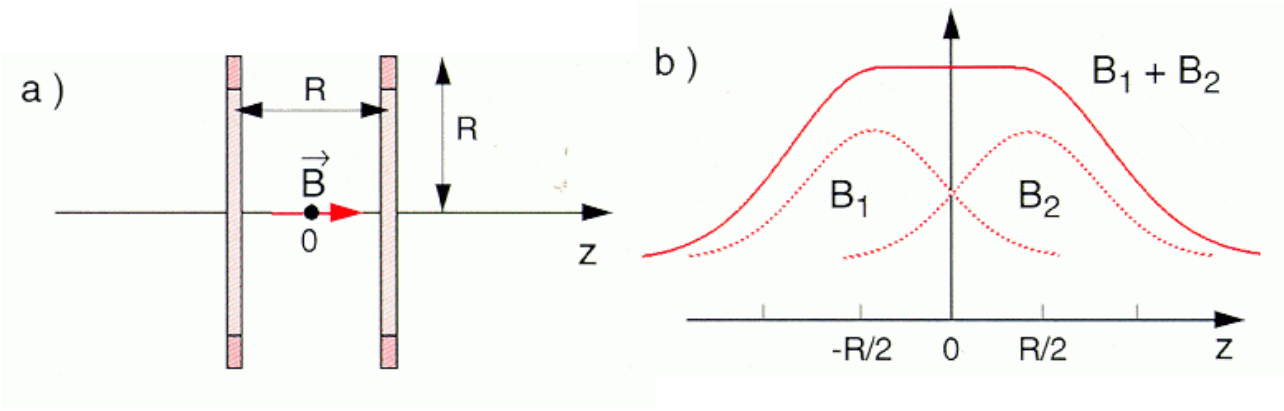


Abbildung 67: Helmholtz-Spulenpaar (a), $B(z)$ entlang der Achse (b).

Die Stromschleife stellt einen magnetischen Dipol dar. Mit der Fläche $\vec{A} = R^2\pi\hat{e}_z$ ($\hat{e}_z$: Flächennormalenvektor) läßt sich das Feld in erster Näherung für $z >> R$ schreiben:

$$\vec{B}(z >> R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^3}\vec{A} = \frac{\mu_0 \cdot \vec{p}_m}{2\pi r^3} \tag{47}$$

Man nennt das Produkt

$$\boxed{\vec{p}_m = I.\vec{A}} \tag{48}$$

das **magnetische Dipolmoment** des Kreisstromes I, der die Fläche $\vec{A}$ umschließt. Ein Vergleich mit dem elektrischen Feld des elektrischen Dipols zeigt, daß beide Felder mit $1/r^3$ abfallen:

$$E_{Dipol}(\vec{r}) \quad = \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}(3p_{el}\,.\,\hat{r}\cos\delta - \vec{p}_{el})$$

9.5.3 Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares

Eine Helmholtzspule besteht aus zwei parallelen Ringspulen mir Radius R im Abstand $d = R$, die in gleicher Richtung von Strom durchflossen werden (Abb. 67).

Wir betrachten zunächst eine Anordnung mit beliebigem Abstand d . Der Nullpunkt des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt des Spulenpaares. Auf der Symmetrieachse der Spulen ist der Betrag

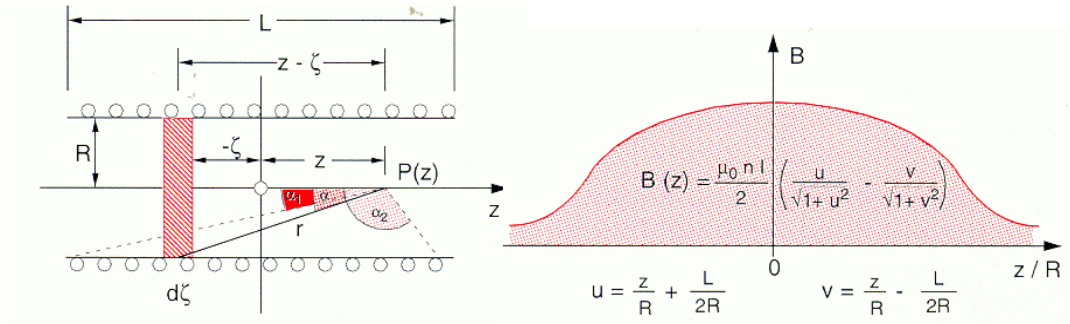


Abbildung 68: Zur Berechnung der Randeffekte einer Zylinderspule

von $B(z)$ im Abstand z vom Nullpunkt nach Gleichung 45

$$\begin{aligned} B(z) &= B_1(\frac{d}{2}+z) + B_2(-\frac{d}{2}+z) = \\ &= \frac{\mu_0 . I\, R^2}{2}\left\{\frac{1}{[(d/2+z)^2+R^2\,]^{3/2}} + \frac{1}{[(-d/2+z)^2+R^2\,]^{3/2}}\right\} \end{aligned}$$

Entwicklet man diesen Ausdruck in eine Taylorreihe um $z = 0$, so fallen alle Terme mit ungeradzahligen Potenzen von z weg, da der Betrag von B symmetrisch um $z = 0$ ist. Nach längerer Rechnung ergibt sich:

$$B(z) = \frac{\mu_0\, I\, R^2}{[(d/2)^2+R^2\,]^{3/2}}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{d^2-R^2}{(d^2/4+R^2)^2}z^2 + \frac{15}{8}\,\frac{(d^4/2)-3d^2R^2+R^4}{(d^2/4+R^2)^4}z^4 + ...\right)$$

Wählt man nun $d = R$ (Helmholtz-Bedingung), so verschwindet der Term mit z^2, und das Feld ist um $z = 0$ in guter Näherung konstant:

$$B(z) = \frac{\mu_0\, I}{(5/4)^{3/2}R}\left(1 - \frac{144}{125}\,\frac{z^4}{R^4}\right) \tag{49}$$

Bei einem Verhältnis von $z/R = 0.3$ beträgt die relative Abweichung von $B(z)$ vom Wert $B(0)$ weniger als 1%.

Drei zueinander senkrecht stehende Helmholtzspulen werden zur Erdfeldkompensation benützt.

Werden die beiden Spulen von entgegengesetzt gleichen Strömen durchflossen, dann erzeugt das "Anti-Helmholtz-Spulenpaar" einen linear mit z ansteigenden Feldgradienten, der bei $z = 0$ durch Null geht:

$$B(z) = B_1(\frac{d}{2}+z) - B_2(-\frac{d}{2}+z) = \frac{96}{125\sqrt{5}}\,\frac{\mu_0\, I}{R^2}z + ... \tag{50}$$

9.5.4 Feld einer Zylinderspule

Es wurde bereits gezeigt, daß im Inneren einer unendlich langen Spule mit n Windungen je Meter ein homogenes Feld $B = \mu_0\, n\, I$ vorliegt. Wir untersuchen den Einfluß der Randeffekte bei endlicher Spulenlänge L. Der Nullpunkt des Koordinatensystems soll in der Mitte der Spule liegen, deren Symmetrieachse als z-Achse gewählt wird (Abb. 68). Der Anteil des Feldes im Punkt $P(z)$, der von $n d\varsigma$ Windungen mit Querschnitt $A = R^2\pi$ im Längenintervall $d\varsigma$ erzeugt wird, ist nach Gleichung 45

$$dB = \frac{\mu_0\, I\, A\, n\, d\varsigma}{2\pi[R^2+(z-\varsigma)^2]^{3/2}}$$

Das Gesamtfeld ergibt sich durch Integration von $\varsigma = -L/2$ bis $+L/2$;das Integral läßt sich durch Substitution $z - \varsigma = R \tan\alpha$ lösen und ergibt:

$$\begin{aligned} B(z) &= \int_{-L/2}^{+L/2} dB = \frac{\mu_0\, I\, n}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_1} \cos\alpha \,.\, d\alpha = \\ &= \frac{\mu_0\, I\, n}{2} \left\{ \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right\} \end{aligned} \tag{51}$$

Im Mittelpunkt der Spule $(z = 0)$ wird

$$\boxed{B(z=0) = \frac{\mu_0\, I\, n}{2} \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2/4}} \approx \mu_0\, I\, n \quad \text{für } L >> R} \tag{52}$$

An den Enden der Spule $(z = \pm L/2)$ ist das Feld auf der Spulenachse:

$$B(z = \pm L/2) = \frac{\mu_0\, I\, n}{2} \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \approx \frac{\mu_0\, I\, n}{2} \quad \text{für } L >> R \tag{53}$$

auf den halben Maximalwert $B(0)$ gesunken. Für Aufpunkte weit außerhalb der Spule können wir die Wurzeln in Gleichung 51 nach Potenzen von $R/(z \pm L/2)$entwickeln und erhalten:

$$B(z) \approx \frac{\mu_0\, I\, n\, R^2 \pi}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(z - L/2)^2} - \frac{1}{(z + L/2)^2} \right\} \tag{54}$$

Die lange Spule mit dem Querschnitt $A = R^2\pi$ wirkt auf weit entfernte Punkte wie ein Stabmagnet mit der Postärke $p = \pm\mu_0\, n\, I\, A = B(z = 0)\, A$.

10 Kräfte auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

10.1 Lorentzktraft

Wenn sich Ladungen in Magnetfeldern bewegen, tritt außer der Coulombkraft zwischen den bewegten elektrische Ladungen eine weitere Kraft auf, deren Größe und Richtung wir durch grundlegende Experimente bestimmen.

Ein beweglich aufgehängter Draht, durch den der Strom I fließt und der sich im homogenen Feld $\vec{B}$ befindet, wird senkrecht zur Stromrichtung und senkrecht zum Magnetfeld ausgelenkt (Abb. 69a). Strom- oder Feldumpolung bewirkt eine Umkehrung der Kraft.

Stromdurchflossene Leiter ziehen einander bei paralleler Stromrichtung an und stoßen einander ab bei antiparalleler Stromführung (Abb. 69b).

Der Elektronenstrahl einer Braunschen Röhre (oder Fadenstrahlrohr) erfährt im homogenen Magnetfeld eine kreisförmige Ablenkung (Abb. 70a). Aus Experimenten mit verschiedenen Richtungen des Feldes ergibt sich, daß die Kraft immer senkrecht zu B und zu v steht und ist somit proportional zum Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$.

Diese Experimente führen zu einem allgemeinen Ausdruck für die Kraft, die sogenannte **Lorentzkraft** [4], auf eine Ladung q, die sich mit $\vec{v}$ im Feld $\vec{B}$ bewegt:

$$\vec{F} = k\, Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

wobei k eine Proprtionalitätskonstante ist, die vom Maßsystem abhängt. Im SI System wird die Stromstärke über die die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern so definiert, daß die Proportionalitätskonstante dimensionslos und $k = 1$ wird, wenn die Kraft in N, die Ladung in As und die Geschwindigkeit in m/s gemessen werden. $\vec{B}$ wird dadurch direkt durch die Kraft auf eine bewegte Ladung definiert. Die Dimension ist wie bereits gezeigt:

$$[B] = 1\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{As}\,.\mathrm{m/s}} = 1\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}} = 1\, \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\mathrm{T}$$

[4] Hendrik Antoon Lorentz (1835-1928)

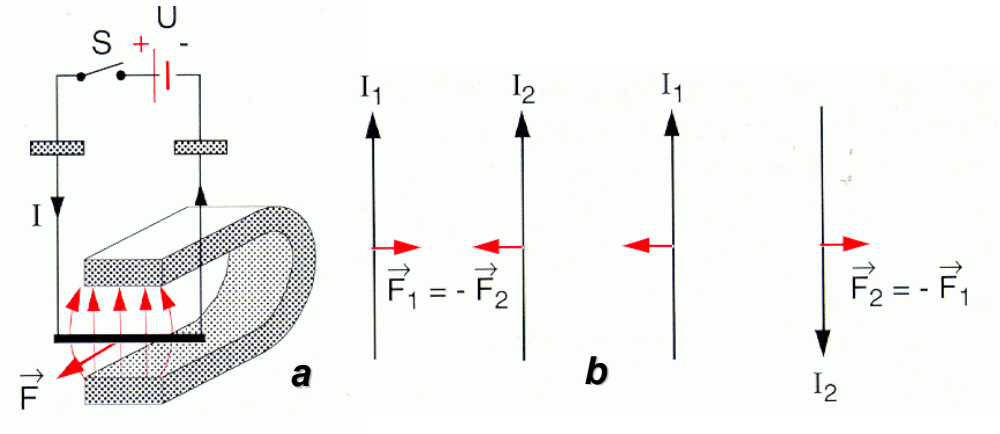


Abbildung 69: Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter (a), anziehende und abstoßende Kräfte zweier stromdurchflossener Leiter (b).

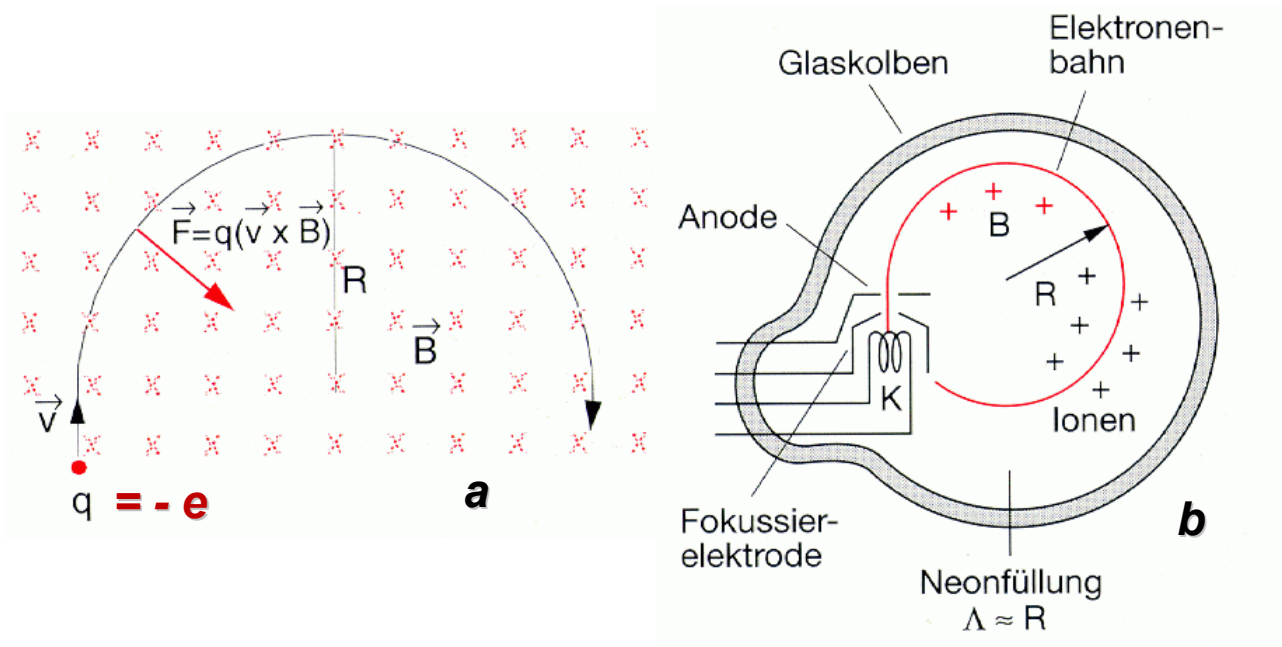


Abbildung 70: Ablenkung eines Elektronenstrahles durch ein Magnetfeld bei senkrechtem Einschuß in das homogene $\vec{B}$-Feld senkrecht zur Zeichenebene (a), Fadenstrahlrohr (b).

Somit ist die Lorentzkraft im SI System:

$$\boxed{\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})} \tag{55}$$

Bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes ist die Kraft (*allgemeine Lorentzkraft)* auf die Ladung Q :

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{56}$$

$$m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\dot{\vec{v}} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{v} \times \vec{B} \equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Somit sind die Bewegungsgleichungen für die allgemeine Lorentzkraft:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Q\left(E_x + (\vec{v} \times \vec{B})_x\right) = Q(E_x + v_y \cdot B_z - v_z \cdot B_y) \\ m\ddot{y} &= Q\left(E_y + (\vec{v} \times \vec{B})_y\right) = Q(E_y + v_z \cdot B_x - v_x \cdot B_z) \\ m\ddot{z} &= Q\left(E_z + (\vec{v} \times \vec{B})_z\right) = Q(E_y + v_x \cdot B_y - v_y \cdot B_x) \ . \end{aligned} \tag{57}$$

Eine Betrachtung der Änderung der kinetischen Energie des Teilchens bei der Bewegung im Magnetfeld liefert folgende Erkenntnis:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot m\, v^2 = \frac{1}{2} \cdot m\, \vec{v} \cdot \vec{v} \\ \frac{dE_{kin}}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot m2\, \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \\ \frac{dE_{kin}}{dt} &= Q\, \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \ , \end{aligned}$$

da der Vektor $(\vec{v} \times \vec{B})$ senkrecht auf $\vec{v}$ steht und somit sein inneres Produkt mit $\vec{v}$ verschwindet !

Man sieht daraus zweierlei:

- Die **kinetische Energie** bleibt bei der Bewegung des Teilchens im homogenen Magnetfeld **konstant**, d.h. das Teilchen ändert seine Geschwindigkeit nur der Richtung nach; $|\vec{v}| = const.$!
- Da der Vektor $\dot{\vec{v}}$, wie man aus der obigen Rechnung sieht, senkrecht auf $\vec{v}$ steht (Verschwinden des inneren Produktes $\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}$), handelt es sich um eine **Kreisbewegung**.

Wenn wir uns bei $\vec{B}$ auf ein Feld in der z-Richtung beschränken $(0, 0, B_z)$, erhalten wir eine wesentliche Vereinfachung der Bewegungsgleichungen:

$$\dot{v}_x = \frac{QB_z}{m} v_y = \ddot{x} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_y &= -\frac{QB_z}{m} v_x = \ddot{y} \\ \dot{v}_z &= 0 = \ddot{z} \end{aligned} \tag{59}$$

Zur Lösung der Differentialgleichung machen wir den Ansatz:

$$v_x = \dot{x} = v_0 \sin(\omega t), \quad v_y = \dot{y} = v_0 \cos(\omega t), \quad v_z = \dot{z} = konst., \tag{60}$$

denn die Projektion dieser Bewegung auf die x-y-Ebene ist ein Kreis, dessen Radius wir berechnen. Differenzieren und Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt:

$$\dot{v}_x = \ddot{x} = \omega \cdot v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad \dot{v}_y = \ddot{y} = -\omega \cdot v_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$\omega \cdot v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{Q \cdot B}{m} \cdot v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$-\omega \cdot v_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\frac{Q \cdot B}{m} \cdot v_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Bewegungsgleichungen sind erfüllt für:

$$\boxed{\omega = \omega_Z = \frac{Q \cdot B}{m}} \; ; \tag{61}$$

ω ist also *unabhängig* von der Geschwindigkeit v (!) und führt den Namen **Zyklotronfrequenz**. Die vollständige Lösung der Bewegungsgleichungen ergibt sich durch Integration von Gleichung 60 mit $\omega = \omega_Z$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_0}{\omega_Z} - \frac{v_0}{\omega_Z}\cos(\omega_Z t) \\ y &= y_0 + \frac{v_0}{\omega_Z}\sin(\omega_Z t) \\ z &= z_0 + v_z t \end{aligned}$$

Für $v_z = 0$ ist dies ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(x_0 + v_0/\omega_z, y_0)$ und dem Radius

$$R = v_0/\omega_Z = \frac{m v_0}{QB}. \tag{62}$$

1. Teilchenbewegung in Richtung des Magnetfeldes bleibt unverändert, da $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$ für alle $\vec{v} \parallel \vec{B}$.

2. In der x- y-Ebene beschreibt ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld eine Kreisbahn, deren Bahngeschwindigkeit durch die Anfangsbedingungen vorgegeben ist.

   Wird das Teilchen in beliebiger Richtung zum Magnetfeld eingeschossen, so beschreibt es in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld eine Kreisbahn, während seine Geschwindigkeitskomponente in Feldrichtung ungeändert bleibt; die resultierende Bewegung hat die Form einer Schraubenlinie oder Helix .

10.1.1 Experimentelle Demonstration der Lorentzkraft

Die Lorentzkraft kann mit einem Fadenstrahlrohr (Abb. 70b) demonstriert werden. Der kugelförmige Glaskolben mit einer Elektronenquelle ist mit geringem Druck eines Gases (Ne oder Hg) gefüllt. Der Glaskolben befindet sich im homogenen Feld einer Helmholtzspule. Die von der Glühkathode emittierten Elektronen werden durch die Anodenspannung U beschleunigt und haben ($mv^2/2 = eU$) die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2eU/m}$, deren Anfangsrichtung $\vec{v}_0 = (v_x, 0, 0)$ senkrecht zum Feld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ gewählt wird. Damit liegt die Lorentzkraft in der x-y-Ebene und steht immer senkrecht auf $\vec{v}$. $\rightarrow$ Die *Elektronenbahn im transversalen Feld ist ein Kreis.* Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft:

$$e\,v\,B = \frac{mv^2}{R}$$

Der Radius (*Zyklotronradius)* hängt von der Anfangsgeschwindigkeit (Beschleunigungspannung) und vom Feld ab

$$R = \frac{m\,v}{e\,B} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

und die Kreisfrequenz (*Zyklotronfrequenz*) ergibt sich aus

$$e\,R\omega\,B = \frac{mR^2\omega^2}{R} \;\; \rightarrow \; \omega_Z = \frac{e\,B}{m}$$

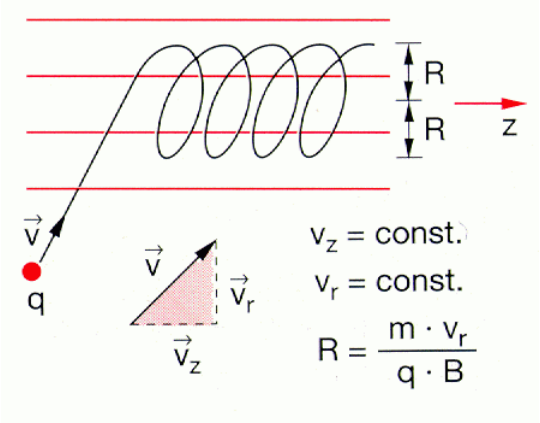


Abbildung 71: Spiralbahn von Elektronen im B Feld

Aus den gemessenen Werten U, B, R kann das Verhältnis von e/m bestimmt werden.

Sichtbar wird der "Elektronenstrahl" durch die Stöße der Elekronen mit den Restgasatomen, die dadurch zum Leuchten angeregt werden. Die Stöße führen nicht zu einer Verschmierung der Kreisbahn, denn:

Die Dichte n der Atome wird so niedrig gewählt, daß die freie mittlere Weglänge $\Lambda = 1/n\sigma$ (σ : Streuquerschnitt der Elektronen) größer als der Umfang einer Kreisbahn $2\pi R$ ist. Durch die Ionisation der Restgasatome bildet sich ein positiver Ionenschlauch, da die schweren Atome nicht so schnell wegdiffundieren und so auch zur Fokussierung beitragen.

Schießt man den Elektronenstrahl (Abb. 71) schräg mit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ in das Feld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ so ist die Bahnkurve eine Schraubenlinie mit dem Radius $R = \frac{1}{B}\sqrt{2mU/e}$ und der Steighöhe, d.h. der Strecke Δz, welche während einer Umlaufszeit

$$\Delta t = \tau = \frac{2\pi}{\omega_Z} = \frac{2\pi m}{eB}$$

in z-Richtung zurückgelegt wird:

$$\Delta z = z_\tau = v_z \tau = \frac{2\pi m}{eB} v_z$$

10.1.2 Elektronen- und Ionenoptik mit B-Feldern

Die Lorentzkraft ermöglicht die Aufweitung und Fokussierung von Elektronen- und Ionenstrahlen durch Magnetfelder und somit die Abbildung von Strukturen.

Fokussierung im Längsfeld Die von einer Glühkathode emittierten Elektronen werden durch die Spannung U beschleunigt und mit einem entsprechenden elektrischen Feld (in Abb. **??** ein el. geladener Hohlzylinder) auf eine Lochblende am Ort (x =0, y =0,z =0) fokussiert, aus der sie dann divergent mit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ austreten. Im Längsfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ bewegen sie sich auf Schraubenbahnen und werden nach der Umlaufzeit $\tau = 2\pi m/eB$ auf der z-Achse bei $z_\tau = v_z\tau$ wieder fokussiert, unabhängig von den Querkomponenten v_x und v_y der Geschwindigkeit!! Wenn $v_z >> \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, gilt näherungsweise $v_z \approx v = \sqrt{2eU/m}$. Der Ausgangspunkt (die Eintrittsblende) des divergenten Strahlenbündels mit verschiedenen Geschwindigkeiten wird nach einem vollen Umlauf $z_\tau = v_z\tau$ in sich abgebildet. Der Vergleich mit einer optischen Linse zeigt, daß ein divergentes Lichtbündel ausgehend von einem Punkt dann wieder in einem Punkt fokussiert wird, wenn sich die punktförmige Lichtquelle in der zweifachen Brennweite der Sammellinse befindet (Strahlen aus dem Brennpunkt treten parallel zur Achse aus). Daher ist die magnetische "Brennweite" f eines longitudinalen Feldes $f = z_\tau/4$:

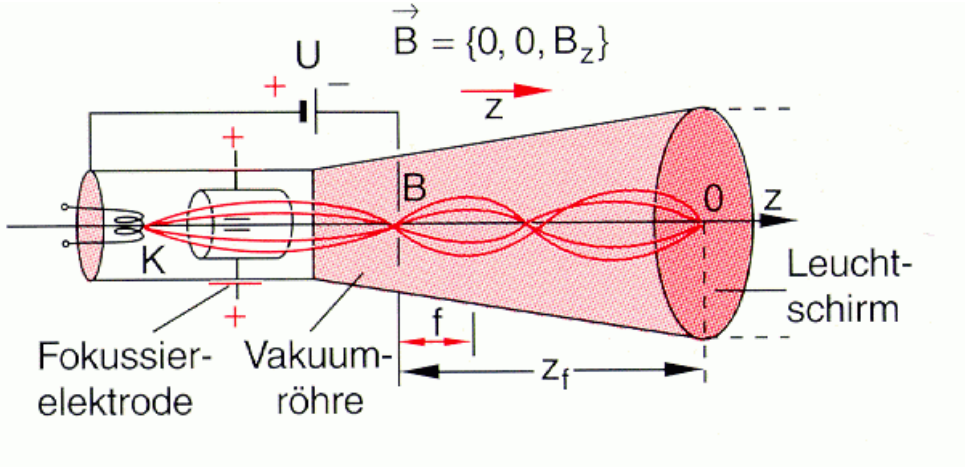


Abbildung 72: Fokussierung des Elektronenstrahles in einer Braunschen Röhre

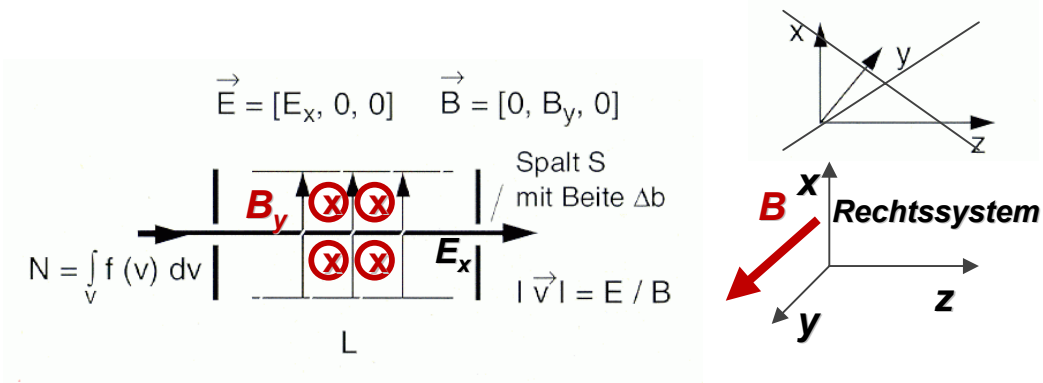


Abbildung 73: Wienfilter

$$f = z_\tau/4 = \tau v_z/4 = \frac{2\pi m}{4eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{\pi}{B}\sqrt{\frac{mU}{2e}} \tag{63}$$

Wienfilter - Geschwindigkeitsfilter: Schickt man einen Elektronen- oder Ionenstrahl durch ein homogenes Magnetfeld $(0, B_y, 0)$ das senkrecht zum el. Feld $(E_x, 0, 0)$ steht, so wird die allgemeine Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ für Teilchen mit der Geschwindigkeit $v_z = E_x/B_y$ Null:

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ q(E_x + v_y B_z - v_z B_y) &= 0 \quad \rightarrow \quad v_z = E_x/B_y \end{aligned}$$

d.h. nur Teilchen in einem engen Geschwindigkeitsintervall Δv um $v = E/B$ werden nicht oder nur so wenig abgelenkt, daß sie den Spalt in Abb. 73 passieren können (→Wienfilter). Hinter dem Spalt erhält man Teilchen einer bestimmten Geschwindigkeit, die man mit $\vec{E}$ und $\vec{B}$ einstellen kann. Für die durchgelassenen Teilchen ergibt sich ein Geschwindigkeitsfenster (siehe Abb.73):

$$\Delta v = \frac{2E_{kin}}{qL^2B}\Delta b$$

Ein Wienfilter wird als Geschwindigkeitsselektor für Ladungsträger verwendet.

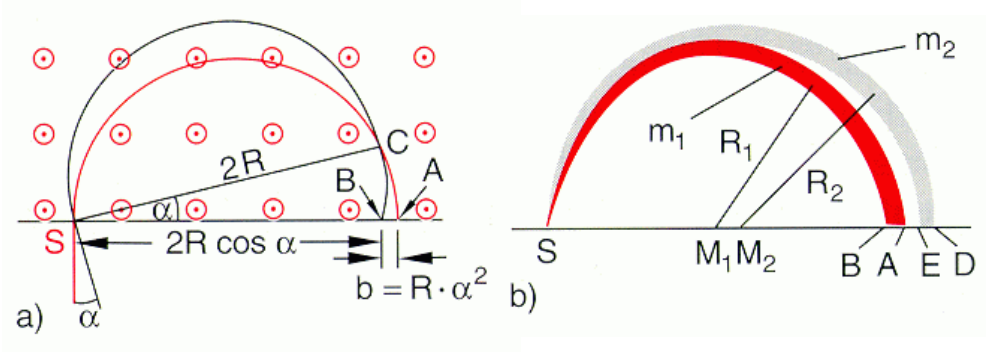


Abbildung 74: Homogenes Magnetfeld als Massenfilter: Winkelfokussierung (a), Massenselektion (b)

Fokussierung durch ein transversales Magnetfeld → *Massenspektrometer* : Ionen mit der Masse m treten divergent aus einer spaltförmigen Quelle S in ein Magnetfeld senkrecht zur Zeichenebene ein (Abb. 74). Im Feld sind die Teilchenbahnen Kreise mit dem Radius

$$R = \frac{m\,v}{e\,B}$$

Ein Ion, dessen Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Zeichenebene senkrecht zur Geraden $\overline{SA}$ liegt, wird nach Durchlaufen des Halbkreises im Punkt A eintreffen. Die Bahnkurve eines anderen Ions, dessen Anfangsgeschwindigkeit v_0 jedoch einen Winkel α zu dem obigen Teilchen einschließt, schneidet die Bahnkurve im Punkt C und erreicht die Gerade $\overline{SA}$ in B. Die Strecke $\overline{AB}$ ist für kleine Winkel α (siehe[5])

$$\overline{AB} \approx 2R(1-\cos\alpha) \approx R\alpha^2$$

Alle Teilchen, die innerhalb des Winkelbereiches $(90^o \pm \alpha/2)$ gegen die Gerade $\overline{SA}$ aus S austreten, werden durch einen Austrittsspalt der Breite $b = R\alpha^2$ durchgelassen.

Emmitiert die Quelle Ionen mit verschiedenen Massen innerhalb dieses Winkelbereiches $(90^o \pm \alpha/2)$, so durchlaufen diese unterschiedliche Kreisbahnen mit verschiedenen Radien $R_i = m_i v_i/(e\,B)$ und treffen an verschiedenen Orten auf die Gerade $\overline{SA}$ (Abb. 74b). Damit ist eine Massenseparation möglich: Zwei Massen m_1 und m_2 können noch voneinander getrennt werden, wenn das Auftreffintervall $\overline{AB}$ für m_1 nicht mit $\overline{DE}$ für m_2 überlappt, d.h.:

$$R_1 - R_2 = \Delta R \geq \frac{1}{2}R\alpha^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta R}{R} \geq \frac{\alpha^2}{2}$$

Die Ionen werden vor Eintritt in das Magnetfeld durch eine Spannung U auf die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2eU/m}$ beschleunigt, sodaß sich die Bahnradien $R_i = (1/B)\sqrt{2m_iU/e}$ ergeben. Das Massenauflösungsvermögen $\Delta m/m$ ergibt sich daher zu

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R^2} = \frac{(R_1-R_2)(R_1+R_2)}{R^2} \simeq \frac{(R_1-R_2)2}{R} = \frac{2\Delta R}{R} \geq \alpha^2$$

und hängt wesentlich vom Divergenzwinkel α ab. Für $\alpha = 2^o = 0.035\,\mathrm{rad}$ ist $\Delta m/m = 1,22\,10^{-3}$, d.h. die Massen $m_1 = 800$ und $m_2 = 801$ können noch getrennt werden.

10.1.3 Kräfte auf stromdurchflossene Leiter im Magnetfeld

Die Stromstärke I in einem Leiter mit der Ladungsdichte $\rho = n.q$ und dem Querschnitt A ist $I = n\,q\,v_D\,A$. Die Lorentzkraft (Abb. 75) auf das Leiterstück dL, in dem sich $nAdL$ Ladungen mit der Driftgeschwindigkeit v_D bewegen, ist

$$d\vec{F} = n\,A\,dL\,q(\vec{v}_D \times \vec{B}) = (\vec{j} \times \vec{B})\,dV = I\,(d\vec{L} \times \vec{B})$$

[5] $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} -$

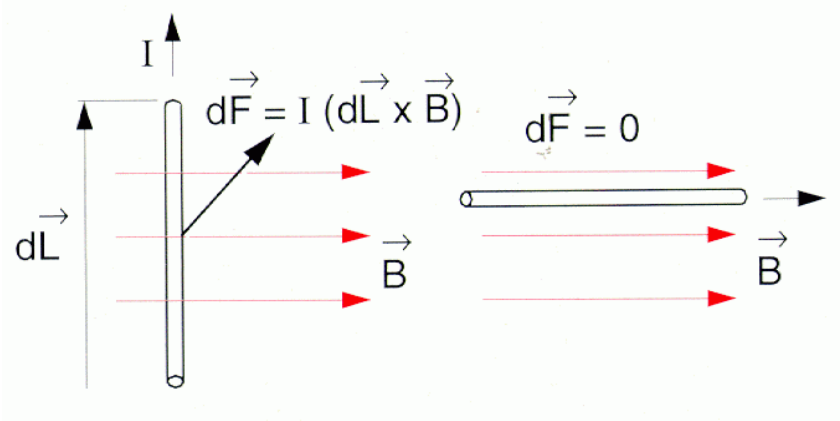


Abbildung 75: Kraft auf einen Leiter im Magnetfeld

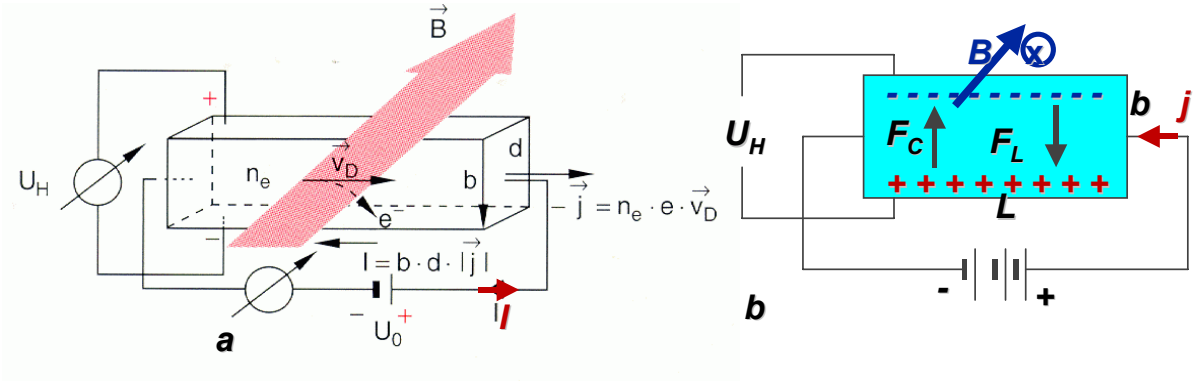


Abbildung 76: Halleffekt: Spannung bei negativen Ladungsträgern (a), Spannung bei positiven Ladungsträgern (b)

Hall-Effekt Die Richtung, in der elektrischer Strom durch einen Leiter fließt, gestattet nicht, auf die Ladungsträger zu schließen. Denn die Richtung von

$$\vec{j} = \rho.\vec{v}$$

zeigt immer in Richtung von $\vec{E}$, unabhängig davon, welches Vorzeichen die Ladungsdiche (Ladungsträger) hat. Es gilt immer

$$sign(\rho) = sign(v)$$

Umso wichtiger ist daher: *Der Halleffekt erlaubt es, das Ldungsträgervorzeichen zu bestimmen*

Betrachten wir einen Leiter- oder Halbleiter der Länge L, der Breite b und der Dicke d, durch den der Strom I fließt im homogen Feld $\vec{B}$ (Abb. 76) Die Lorentzkraft bewirkt eine Ablenkung der Ladungsträger sekrecht zum Magnetfeld und zur Stromrichtung (Abb. 75). Diese Ablenkung bewirkt eine Ladungstrennung, die wieder ein elektrisches Feld $\vec{E}_C$ hervorruft. Die Ladungstrennung schreitet so lange fort, bis das sich aufbauende elektrische Feld eine Kraft $\vec{F}_C = q\,\vec{E}_H$ bewirkt, die gleich groß, aber entgegengesetzt zur Lorentzkraft $\vec{F}_L = q\,(\vec{v}_D \times \vec{B})$ ist: $\vec{F}_L = -\,\vec{F}_H$

Das bedeutet, daß die Ladungsträger auf die untere Seite wandern, **unabhängig** von ihrem Ladungsvorzeichen! Wenn die Ladungsträger positiv sind, wird die untere Seite positiver als die obere Seite (Abb. 76b) und es bildet sich zwischen der unteren und oberen Seite eine Potentialdifferenz aus

$$U_H = \phi_U - \phi_O > 0$$

Für negative Ladungsträger dagegen erhalten wir (Abb. 76a)

$$U_H = \phi_U - \phi_O < 0$$

Bei einem Leiter mit rechteckigem Querschnitt $A = b.d$ (Abb. 76) führt dies zu einer Hall-Spannung

$$U_H = \int_0^b \vec{E}_H \,.\, d\vec{s} = \vec{E}_H \,.\, \vec{b}$$

zwischen den gegenüberliegenden Seitenflächen im Abstand b. U_H ist in Abb. 76 die Spannung zwischen oberer und unterer Seitenfläche; der Vektor $\vec{b}$ zeigt also von oben nach unten. Aus dem Gleichgewicht der Kräfte $\vec{F}_H = -\vec{F}_L$ ergibt sich mit $\vec{j} = nq\vec{v}_D$:

$$n\,q\vec{E}_H = -\,n\,q\,(\vec{v}_D \times \vec{B}) \quad \rightarrow \quad U_H = -\,\frac{(\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{b}}{n\,q}$$

Das Vektorprodukt zeigt in Richtung $\vec{b}$ *unabhängig davon, ob positive oder negative Ladungsträger* den Strom $I = j.b.d$ transportieren. Bei orthogonaler Geometrie kann man vereinfacht schreiben:

$$U_H = -\frac{j\,B\,b}{n\,q} = -\frac{I\,B}{n\,q\,d} \quad \rightarrow \quad U_H = -\frac{1}{\rho} I \frac{B}{d} = R_H \frac{I\,B}{d} \tag{64}$$

$$R_H = -\,\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{nq} \quad \text{Hallkonstante} \tag{65}$$

Die Größe $R_H = -1/q\,n$ ist vom Material abhängig und wird als Hall-Konstante bezeichnet. In Metallen und Halbleitern sind die Ladungsträger vorwiegend Elektronen mit $q = -e$, sodaß man eine negative Hall-Spannung mißt (Abb. 76a). Manche Halbleiter und auch Metalle (Bi) zeigen eine positive Hallspannung, woraus in dem einfachen Leitungsbandmodell geschlossen wird, daß die Ladungsträger Löcher sind. Man verwendet Hall-Sonden (meist Halbleiter, da n etwa 10^6-mal kleiner ist als in Metallen) zur Ausmessung von Magnetfeldern. Die Beweglichkeit $\mu = 1/(\rho_{el} nq)$ kann somit auch bestimmt werden (ρ_{el} : spezifischer Widerstand).

Beispiel: Hall-Sonde mit $b = 1\,\text{cm}$, $d = 0.1\,\text{cm}$ und $n = 10^{15}\text{Ladungsträger/cm}^3$ ($e = 1,6\,10^{-19}\,\text{C}$) erhält man bei einem Strom $I = 0.1\,\text{A}$ eine Stromdichte von $j = 1\,\text{A/cm}^2$ und eine Empfindlichkeit zur Feldmessung $U_H/B \approx 0,6\ \text{V/T}$

10.1.4 Kräfte zwischen zwei parallelen stromführenden Leitern: SI Definition 1 A

Die Kraft auf die Ladung $dq = \rho\,A\,dL$, die mit der Driftgeschwindigkeit v_D durch den Leiter 1 mit Querschnitt A im Magnetfeld des Leiters 2 fließt (Abb. 77), ist:

$$d\vec{F} = n\,A\,dL \cdot q\,(\vec{v}_D \times \vec{B}) = I_1(d\vec{L} \times \vec{B})$$

Das Magnetfeld des Leiters I_2 ist

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\,I_2}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$$

Bei parallelen Drähten in z-Richtung gilt $\vec{B} \perp \vec{v}_D$. Der Betrag der Kraft pro Meter Drahtlänge ($L = 1\,\text{m}$) ist dann bei einem Abstand $r = R$ zwischen den Drähten

$$\frac{F}{L} = I_1\,B = I_1 \frac{\mu_0\,I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0\,I^2}{2\pi R}$$

wenn durch beide Drähte der gleiche Strom fließt. Bei einem Strom von 1 A ergibt sich bei einem Abstand von 1 m die Kraft pro Meter Leiterlänge $F/L = \mu_0/2\pi = 2\,.10^{-7}\,\text{N/m}$. $\rightarrow$ SI Definition:

1A ist die Stromstärke, die zwischen zwei unendlich langen, geraden im Abstand von 1m angeordneten Leitern eine Kraft von $2\,.10^{-7}\,\text{N}$ pro m Leiterlänge verursacht. Damit wird auch die Permeabilitätskonstante auf den exakten Wert von $\mu_0 = 4\pi\,.10^{-7}\,\text{Vs/Am}$ festgelegt.[6]

[6] SI Definition der magnetischen Größen (1992): The magnetic field strength, **H**, is a vector quantity, the rotation (curl) of which is equal to the sum of the electric current density and the time derivative of the electric flux density. The magnetic flux density or magnetic induction, **B**, is a vector quantity such that the force exerted on an element of electric current is equal to the vector product of this element and the magnetic flux density: $\mathbf{F} = I\ \Delta\mathbf{s} \times \mathbf{B}$. The magnetic moment, **m**, is a vector quantity, the vector product of which with the magnetic flux density of a homogeneous field is equal to the torque: $\mathbf{m} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}$. The magnetization as the magnetic moment per unit volume is defined by the relation $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$.

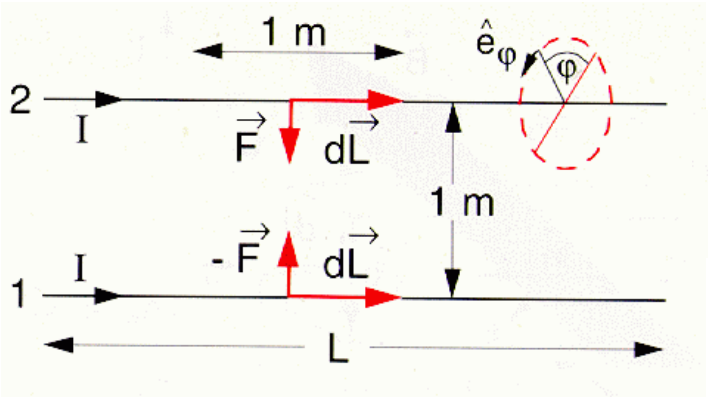


Abbildung 77: Zur Definition von 1A

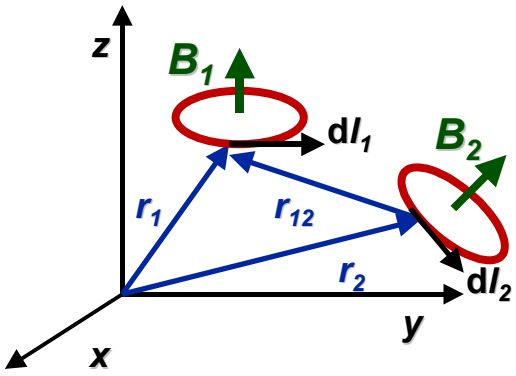


Abbildung 78: Magnetische Kräfte von zwei Leitern: analog zum Coulombschen Gesetz.

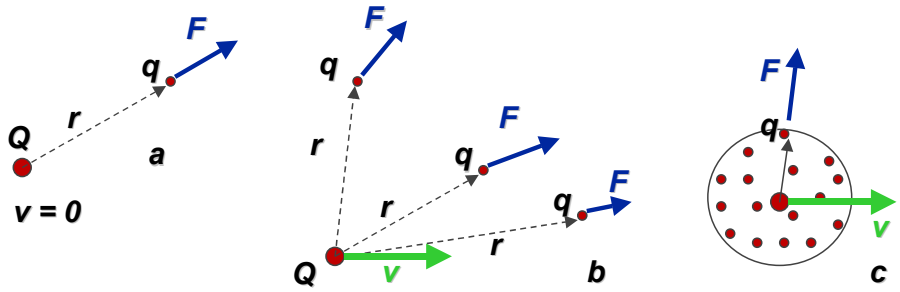


Abbildung 79: Die ruhende Ladung kann mit dem Coulombschen Gesetz bestimmt werden (a), die Kraft hängt von der Lage der bewegten Ladung ab (b), beim Durchgang von Q durch den Mittelpunkt der ruhenden, kugelförmigen Anordnung von Probeladungen q wird die Kraft auf jede Probeladung gemessen; der Mittelwert der Kräfte wird zur Bestimmung von Q verwendet $\Rightarrow$ dies ist der Bestimmung des Flächenintegrales von $\vec{E}$ äquivalent.

Die Kraft zwischen zwei Leitern bei allgemeiner Geometrie ist (Abb.78):

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dq\,(\vec{v}_D \times \vec{B}) = I_1(d\vec{L}_1 \times \vec{B}) \qquad \text{mit} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0\, I_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{L}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \\ d^2\vec{F} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1\, I_2 \frac{d\vec{L}_1 \times (d\vec{L}_2 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \qquad \text{oder} \end{aligned} \tag{66}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1\, I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{L}_1 \times (d\vec{L}_2 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$$

11 Elektromagnetisches Feld und Relativitätsprinzip

11.1 Wie mißt man bewegte Ladungen?

Die Größe einer ruhenden Ladung ist dadurch bestimmt, daß wir auf Grund des Coulombschen Gesetzes die Kraft zwischen ihr und einer sich in Ruhe befindlichen Testladung q im Abstand r messen, wobei sich bekanntlich ergibt:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{F}{q} \cdot r^2 \quad , \qquad q \ldots \text{Testladung} \quad .$$

Wenn wir eine bewegte Ladung auf diese Weise ausmessen wollen, so stoßen wir auf Schwierigkeiten, da sich während der Bewegung die Position zur Testladung dauernd ändert und damit auch die Größe und Richtung der Kraft. Wir können diesem Dilemma entgehen, indem wir uns vorstellen, daß sich unsere bewegte Ladung durch eine kugelförmige, gleichmäßig verteilte Ansammlung von Testladungen (siehe Abb. 79) hindurch begibt, und wir wollen in dem Moment, wo die Ladung Q durch den Mittelpunkt der Kugel fliegt, die Kraft auf jede einzelne Testladung bestimmen und dann über alle Kräfte mitteln.

Dies wäre gleichbedeutend mit der Bestimmung der Feldstärke an jedem Punkt der Kugeloberfläche (die Kraft bezogen auf die Ladungseinheit q ist die Feldstärke $\vec{E}$). Die Mittelung entspricht der Berechnung des Oberflächenintegrals der Feldstärke über die Kugeloberfläche. Wir müssen nur das Gaußsche Gesetz anwenden, um die Ladung zu errechnen:

$$Q = \varepsilon_0 \cdot \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad . \tag{67}$$

Wir wissen, daß bei ruhenden Ladungen die Größe des obigen Ausdruckes von der Art der Fläche A unabhängig ist, was ja dem Gaußschen Satz äquivalent ist. Hier, bei bewegten Ladungen, ist dies nicht von vornherein sicher, aber es kann als erwiesen gelten. Erst mit Hilfe von (67) kann man bei bewegten Ladungen deren Größe sinnvoll definieren.

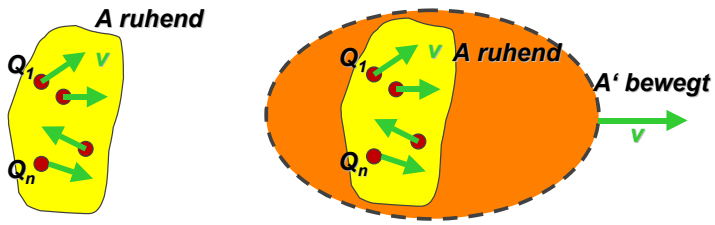


Abbildung 80: Das über A erstreckte Fl ächenintegral von E gleicht dem über A' erstreckten Flächenintegral von E'.

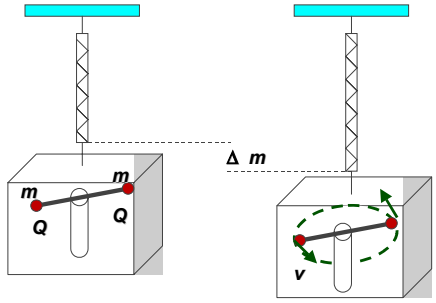


Abbildung 81: Gedankenexperiment zur Ladungsinvarianz

11.2 Ladungsinvarianz

Wir können annehmen, daß innerhalb eines geschlossenen Systems (siehe Abb.80a) die Ladung in ihrer Gesamtheit konstant bleibt, ganz gleichgültig, ob die Ladungen ruhen oder sich gegeneinander mit großer Geschwindigkeit bewegen.

Man sagt, es herrscht unabhängig vom Ladungszustand Invarianz der Ladung. Experimentell kann dieser Sachverhalt in verschiedenster Weise bestätigt werden.

Ein sehr deutlicher Nachweis für die Unabhängigkeit der Ladung vom Bewegungszustand des geladenen Teilchens ist die Tatsache, daß z.B. sowohl im Wasserstoffmolekül als auch im Heliumatom, welche beide aus gleich vielen Protonen und Elektronen bestehen, exakte elektrische Neutralität vorliegt, obwohl der Bewegungszustand der Ladungsträger ganz verschieden ist.

Die Masse ist hingegen *nicht* invariant. Bekanntlich ändert sich die Masse durch seine Bewegung um $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Dazu das Gedankenexperiment in Abb.81: In dem Behälter befinden sich zwei Ladungen Q mit der Masse m auf einem rotierbar gelagerten Stab. Bei Bewegung mit der Geschwindigkeit v ist der rechte Behälter um $2m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ schwerer. Die Gesamtladung ändert sich jedoch nicht! Das äquivalente reale Experiment ist die Massenspektroskopie von einem ionisierten Deuteriummolekül (D_2^+ mit 2 Protonen, 2Neutronen und 1 Elektron) und einem ionisierten Heliumatom (He^+ mit 2 Protonen, 2 Neutronen und 1 Elektron), bei der ein Massenunterschied aber kein Ladungsunterschied festgestellt werden kann. Bei den beiden Ionen bewegen sich die zugehörigen Teilchen unterschiedlich schnell; $\Rightarrow$ die entsprechenden Energieunterschiede zeigen sich als meßbare Massenunterschiede.

Die Ladungsinvarianz verleiht der Ladungsquantisierung eine besondere Bedeutung. Sie gilt nicht nur für ruhende Ladungen, sondern auch für Ladungen mit jedem beliebigen Zustand der Relativbewegung. Betrachten wir also nochmals eine Ansammlung von Ladungen (siehe Abb. 80), und umschließen wir diese Ladungen mit einer Fläche A, so wissen wir aus dem Gaußschen Satz, daß das Oberflächenintegral der Feldstärke $\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ unabhängig von A ist, solange die eingeschlossene Ladung gleich bleibt. Der Wert des Flächenintegrals hängt nur von der *Anzahl und der Art der innerhalb von A vorhandenen Teilchen und nicht vom Bewegungszustand* ab. Nach dem Relativitätsprinzip muß diese Aussage aber für jedes Inertialsystem gelten, d.h., auch für eine Fläche A', welche zur Zeit t' gerade alle Ladungen einschließt und sich gegenüber A bewegt. Wenn S' irgendein anderes Inertialsystem ist, das sich relativ zu S bewegt, muß das diesbezügliche Oberflächenintegral denselben Wert annehmen, soferne in diesem

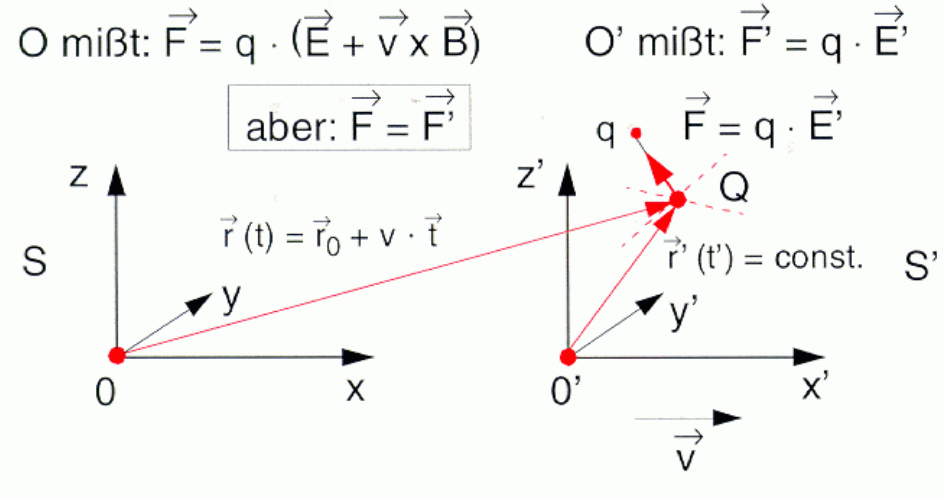


Abbildung 82: Äquvalenz der Beschreibung der Kraft auf eine Probeladung in zwei verschiedenen, aber gleichwertigen Inertialsystemen.

Bezugssystem zur Zeit t' dieselben Ladungen von A' umschlossen werden, die A zur Zeit t umhüllte:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{A'(t')} \vec{E}' \cdot d\vec{A}' = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{68}$$

$\vec{E}'$ wird im System S' gemessen, d.h. es ist durch die Kraft auf eine in S' ruhende Probeladung definiert. Jedes der beiden Flächenintegrale muß zu einem bestimmten Zeitpunkt im zugehörigen Bezugssystem bestimmt werden.

Es ist festzuhalten, daß wir eben die *relativistische Invarianz* der elektrischen Ladung dargestellt haben; nicht zu verwechseln damit ist die Erhaltung der Ladung in einem abgeschlossenen System: $\mathrm{div}\vec{j} = \partial\rho/\partial t$. Ladungsinvarianz heißt, daß ein Ladungssystem, von verschiedenen Bezugssystemen betrachtet, immer dieselbe Gesamtladung ergibt. Für die Energie gilt ein Erhaltungssatz, aber sie ist keine relativistische Invariante! Dagegen bleibt Ladung erhalten *und* ist eine relativistische Invariante.

Elektrische Felder, von verschiedenen Bezugssystemen aus betrachtet, können sich allerdings ändern; wir wollen dies im folgenden zeigen.

11.3 Nochmals Lorentzkraft

Die Lorentzkraft wurde bisher als zusätzliche Kraft auf eine im Magnetfeld bewegte Ladung aufgrund experimenteller Beobachtungen zusätzlich zur Coulombkraft eingeführt. Es wird nun gezeigt, daß die Lorentzkraft keine grundsätzlich neue Kraft ist, denn bei der relativistischen Behandlung des Coulomb-Gesetzes ergibt sich bei bewegten Ladungen die Lorentzkraft.

Dazu betrachten wir zwei Inertialsysteme (Abb. 82): Die im System S' ruhende Ladung Q erzeugt ein Coulombfeld $\vec{E}'$ und der Beobachter O' mißt mit der Probeladung q die Kraft $\vec{F}' = q\vec{E}'$.

Das System S' bewegt sich gegen das Inertialsystem S mit $\vec{v}$. Für den Beobacher O entspricht die mit $\vec{v}$ bewegte Ladung Q einem Strom, der ein Magnetfeld $\vec{B}$ erzeugt, zusätzlich zu dem von O gemessenen elektrischen Feld $\vec{E}$. Somit mißt O die Kraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

Andererseits sind alle Inertialsysteme äquivalent, d.h. die Beschreibung physikalischer Gesetze muß unabhängig vom gewählten Inertialsystem sein. Insbesonders müssen die Kräfte auf eine Probeladung q von beiden Beobachtern als gleich gemessen werden: Wenn der Beobachter O' seine Ergebnisse in den Koordinaten von S beschreibt, indem er eine Lorentz-Transformation anwendet, muß er zu den gleichen Ergebnissen gelangen wie der Beobachter O im System S. → Daher muß ein Zusammenhang zwischen $\vec{E}'$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ dergestalt bestehen, daß die Äquivalenz der Inertialsysteme bei der Beschreibung

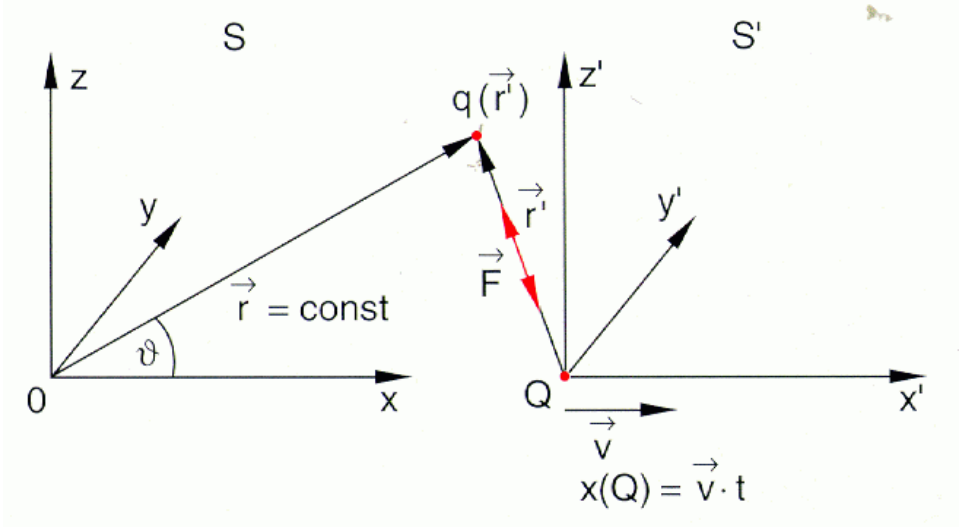


Abbildung 83: Zur Herleitung des $\vec{E}$ Feldes einer bewegten Ladung.

physikalischer Gesetze gewahrt bleibt. D.h. die Wirkung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf die Probeladung q im System S muß zu den gleichen Gesetzen führen wie die Wirkung von $\vec{E}'$ auf q in S'.

11.4 Das elektrische Feld einer bewegten Ladung

Eine Probeladung q möge im Laborsystem S im Punkt (x, y, z) ruhen, während eine im Nullpunkt des Systems S'ruhende Feldladung Q sich mit der Geschwindigkeit $(v_x, 0, 0)$ relativ zu S bewegt und zum Zeitpunkt $t = 0$ den Koordinatenursprung $(0, 0, 0)$ passiert (Abb.83).

Wir berechnen die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ zur Zeit $t = 0$ und damit die Feldstärke $\vec{E}$ der bewegten Ladung Q vom Standpunkt des Beobachters O :

Die Größe der Ladung Q bzw. q wird durch die Bewegung nicht geändert (relativistische Invarianz der Ladung). In S haben die Ladungen Q bzw. q zur Zeit $t = 0$ die Raum-Zeit-Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$ und $(x, y, z, 0)$. Im System S', das sich mit der Ladung bewegt und dessen Ursprung zur Zeit $t = 0$ mit dem von S zusammenfällt, bleibt Q für alle Zeiten im Ursprung $O'(0, 0, 0, t')$, während für q die Koordinaten (x', y', z', t') in S' sind. Die Standard-Lorentz-Transformation für Länge, Geschwindigkeiten und Kräfte sind in Tabelle SLT zusammengestellt.

	Standard-Lorentz-Transformation	
Länge & Zeit		Geschwindigkeit
$x' = \gamma(x - vt)$	$\Rightarrow \quad \Delta l'_x = \Delta l_x \sqrt{1-\beta^2}$;	$u'_x = \delta(u_x - v)$
$y = y'; \quad z = z'$		$u'_y = \frac{\delta}{\gamma} u_y$
$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$	$\Rightarrow \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \gamma$	$u'_z = \frac{\delta}{\gamma} u_z$
mit		
$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}; \quad \beta = \frac{v}{c}$	$\delta = 1/(1 - \frac{vu_x}{c^2})$	$\delta' = 1/(1 - \frac{vu'_x}{c^2})$
Kräfte		
$F'_x = \delta(F_x - \frac{v}{c^2}\vec{F} \cdot \vec{u})$		$F_x = \delta'(F'_x - \frac{v}{c^2}\vec{F} \cdot \vec{u}')$
$F'_y = \frac{\delta}{\gamma} F_y, \quad F'_z = \frac{\delta}{\gamma} F_z$		$F_y = \frac{\gamma}{\delta'} F'_y, \quad F_z = \frac{\gamma}{\delta'} F'_z$

Für diesen Fall sind die Koordinaten:

$$x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

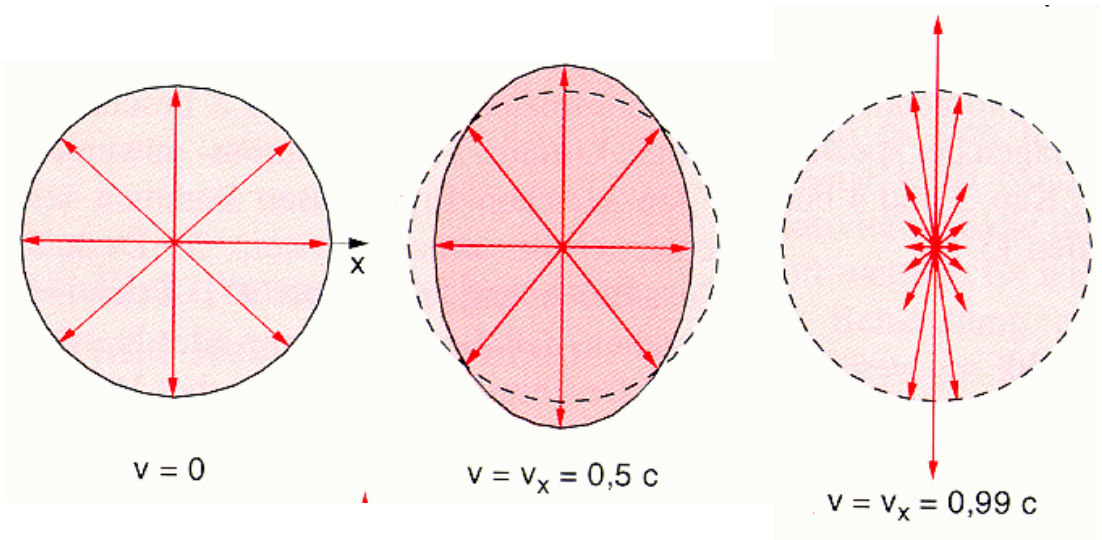


Abbildung 84: $\vec{E}$ -Feld einer bewegten Ladung für verschiedene Geschwindigkeiten

Beachte: Die in S gleichzeitigen Punktereignisse $(0,0,0,0)$ für Q und $(x,y,z,0)$ für q zur Zeit $t=0$ werden für den Beobachter O' im System S'nicht mehr gleichzeitig stattfinden: $(0,0,0,0)$ für Q und $(x',y',z',t'=\gamma x,y,z,-\gamma vx/c^2)$ für q. Um die Kraft zwischen q und Q zu bestimmen, müssen wir die Koordinaten beider Ladungen gleichzeitig messen. Da Q in S' ruht, bleiben ihre Raumkoordinaten zeitlich konstant und sind dieselben für $t'=0$ und $t'=-\gamma vx/c^2$. Daher ist der Abstand $r'=(x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2}$ zwischen Q und q eindeutig bestimmbar. In S' gilt das Coulombgesetz:

$$\vec{F}'=q\vec{E}'=\frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}'}{r'^2}$$

Transformieren wir die Kräfte mit Tabelle LT ins System S, so ergeben sich für $\vec{u}=\vec{0}$ (Feldladung ruht in S') :

$$\begin{aligned} F_x &= F'_x=\frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3} \\ F_y &= \gamma F'_y=\frac{\gamma\,q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3} \\ F_z &= \gamma F'_z=\frac{\gamma\,q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3} \end{aligned} \tag{69}$$

Für $t=0$ gilt:

$$x'=\gamma x;\;\; y'=y;\;\; z'=z;\;\; \rightarrow \;\; r'=(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

daher erhält man für den Beobachter O die Vektorgleichung:

$$F(\gamma,\vec{r})=\frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma\,\vec{r}}{(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=q.\,\vec{E}(\gamma,\vec{r}) \tag{70}$$

Auch für den Beobachter O wirkt die Kraft immer längs der Verbindungslinie $\vec{r}$ von Q nach q, aber sie ist nicht mehr kugelsymmetrisch: Liegt q auf der x-Achse, d.h. in Bewegungsrichtung von Q, so ist $y=z=0$ und $\vec{F}$ wird um den Faktor $1/\gamma^2$ kleiner; in Richtung senkrecht zu $\vec{v}$ ist $x=0$ und $\vec{F}$ wird um den Faktor γ größer. Das elektrische Feld ist in Abb. 84 für verschiedene Gewschwindigkeiten dargestellt. Mit dem Winkel ϑ zwischen Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der Richtung von $\vec{r}$ läßt sich $\vec{E}(\gamma,\vec{r})$ umformen:

$$\boxed{\vec{E}(\gamma,\vec{r})=\frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)\,\vec{r}}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\vartheta]^{3/2}}} \tag{71}$$

Das elektische Feld einer bewegten Ladung ist nicht mehr kugelsymmetrisch, sondern hängt vom Winkel ϑ gegen die Bewegungsrichtung ab!

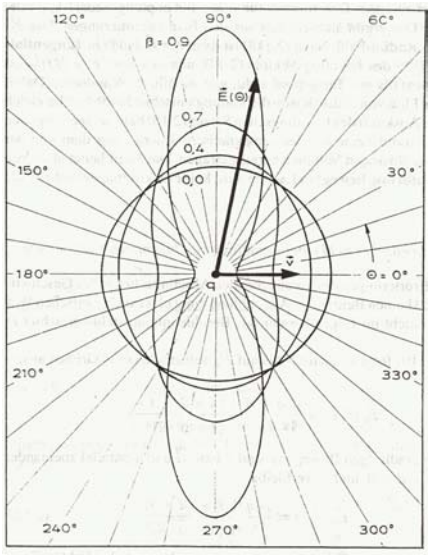


Abbildung 85: Winkelabhängigkeit der elektrischen Feldstärke um eine gleichförmig bewegte Punktladung für verschiedene Geschwindigkeiten.

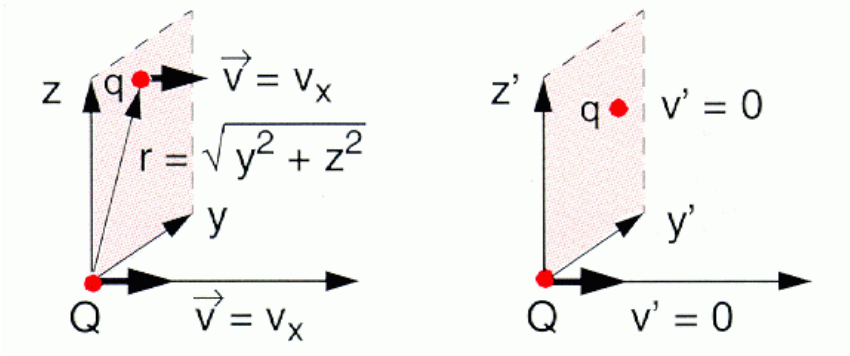


Abbildung 86: Die Ladungen Q und q ruhen im System S' und haben im System S die gleiche Geschwindigkeit v_x

11.5 Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld

Wir betrachen den Fall, daß sich beide Ladungen $q(0, y, z, t = 0)$ und $Q(0, 0, 0, t = 0)$ im System S mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(v_x, 0, 0)$ parallel zueinander im konstanten Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ bewegen (Abb. 86).

Im System S', das sich mit $\vec{v}$ bewegt, ruhen beide Ladungen und haben immer die Koordinate $x' = 0$ und den Abstand $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = r$. Der Beobachter O' in S' mißt daher:

$$\begin{aligned} F'_x &= 0 \\ F'_y &= \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3} \\ F'_z &= \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z'}{r'^3} \end{aligned}$$

Wir transformieren die Kräfte ins System S, wobei $\vec{u}' = 0$, da q in S' ruht:

$$\begin{aligned} F_x &= F'_x = 0 \\ F_y &= F'_y/\gamma = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\gamma\, r'^3} \\ F_z &= F'_z/\gamma = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\gamma\, r'^3} \end{aligned}$$

Wenn q in S ruhen würde, hätten wir nach Gleichung 69 zur Zeit $t = 0$, d.h.: $x = 0$, die Kraft:

$$\begin{aligned} F_x &= 0 \\ F_y &= \frac{\gamma\, q\, Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r'^3} = \gamma F'_y \\ F_z &= \frac{\gamma\, q\, Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r'^3} = \gamma F'_z \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \frac{\gamma\, q\, Q}{4\pi\varepsilon_0\, r'^3}\,\{0, y, z\} \tag{72}$$

Wenn die Beschreibung in beiden Inertialsystemen zu gleichen Ergebnissen führen soll, muß der Unterschied zwischen obigen Kräften

$$\Delta\vec{F} = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0\, r'^3}\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)\{0, y, z\} = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)\vec{F}' = \vec{F}_{magn} = q(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{73a}$$

der magnetischen Kraft $\vec{F}_{magn} = q(\vec{v}\times\vec{B})$ entsprechen, die der Beobachter O im Ruhesystem experimentell für bewegte Ladungen gefunden hat.

$$q(\vec{v}\times\vec{B}) = -\frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0\, r'^3}\gamma\frac{v^2}{c^2}\,\{0, y, z\} = -\frac{v^2}{c^2}\gamma\vec{F}'$$

Ein Vergleich von 72 und 73a zeigt, daß zwischen dieser magnetischen Kraft, die für den Beobachter O bei bewegter Feld- und Probeladung auftritt, und der elektrischen Kraft $\vec{F}_{el}$, die O bei ruhender Probe- und Feldladung mißt, die Beziehung besteht:

$$\boxed{\vec{F}_{mag} = -\frac{v^2}{c^2}\vec{F}_{el}} \tag{74}$$

Die zusätzliche magnetische Kraft kommt also durch die Bewegung von Q zustande. Würden sich beide Ladungen mit Lichtgeschwindigkeit $v = c$ gegen das System S des Beobachters O bewegen, so würde $\vec{F}_{mag} = -\vec{F}_{el}$, d.h. die Gesamtkraft zwischen beiden Ladungen wäre unabhängig vom Vorzeichen beider Ladungen Null (Abb.87). (Diese Situation tritt annähernd bei Teilchenbeschleunigung auf, wenn Elektronen oder Protonen $v \simeq 0,9999c$ erreichen).

Für den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld der bewegten Ladung im Laborsystem erhält man im ruhenden Laborsystem S aus $\vec{F}_{magn} = q(\vec{v}\times\vec{B})$ und $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ durch einsetzen in 74:

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{v^2}(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{75}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}) \tag{76}$$

Da $\vec{B} \perp \vec{E}$ folgt für die Beträge der Felder einer bewegten Ladung.

$$\boxed{B = \frac{v}{c^2}E \quad \text{für } v \to c \text{ wird } B = \frac{1}{c}E} \tag{77}$$

Das Magnetfeld einer bewegten Ladung kann relativistisch als eine Änderung des elektrischen Feldes erklärt werden. Diese Änderung $\Delta\vec{F}$ der Coulombkraft $\vec{F}$ auf eine Probeladung q ergibt die Lorentzkraft $q(\vec{v}\times\vec{B})$.

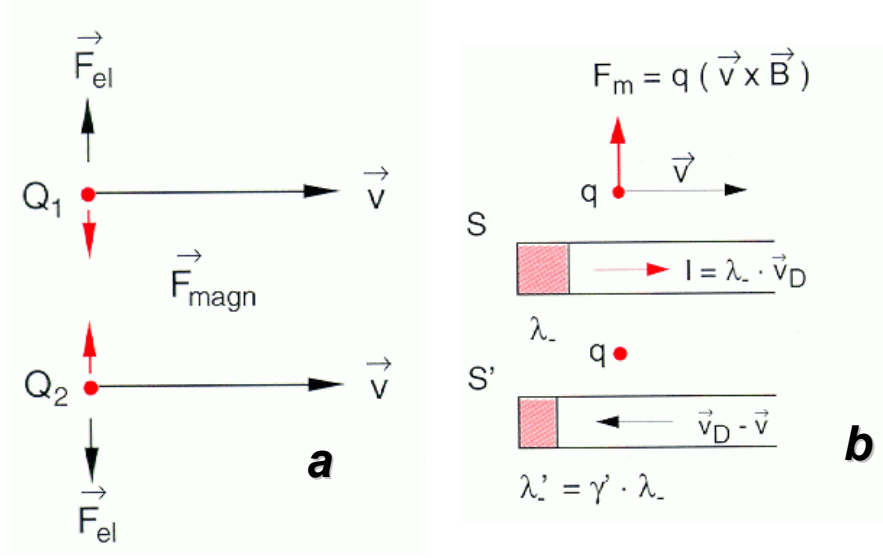


Abbildung 87: Elektrische und magnetische Kräfte von zwei Ladungen, die sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen (a), Wechselwirkung zwischen einem geraden stromführenden Leiter und der Ladung q im System S, in dem der Leiter ruht und q bewegt sich mit v; im System S' ruht die Ladung q und die Ladungsträger bewegen sich mit $\vec{v}_D - v$ (b)

11.6 Relativistische Transformation von Ladungsdichte und Strom

Wir machen uns die Ursache für das Magnetfeld eines Stromes an einem weiteren Beispiel klar: Eine Probeladung q bewegt sich mit $\vec{v}$ parallel zu einem geraden Leiter, durch den der Strom I fließt (Abb. 87b). Im Laborsystem, in dem der Leiter ruht, wird vom Beobachter O die Lorentzkraft $q(\vec{v} \times \vec{B})$ gemessen. Für ihn hat der elektrisch neutrale Leiter die Ladungsdichten λ_- und λ_+ für die Elektronen bzw. positiven Ionen, wobei $\lambda_- = -\lambda_+$. Die Elektronen bewegen sich mit einer Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_D$ gegen die im Leiter ruhenden Ionen, sodaß der Strom $I = v_D\,\lambda_-$ entsteht.

Für den Beobachter O' der sich mit q parallel zum Leiter bewegt, ist die Leiterlänge infolge der Lorentz-Kontraktion verkürzt, und er mißt daher eine höhere Ladungsdichte:

$$\lambda'_+ = \frac{\lambda_+}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\lambda_+ \qquad \lambda'_- = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \gamma'\lambda_- \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c},\ \beta' = \frac{v'}{c} \tag{78}$$

für die ruhenden Ionen bzw. Elektronen, die sich nach dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten (Tabelle TR) mit der Geschwindigkeit

$$v' = \frac{\vec{v}_D - \vec{v}}{1 - v_D v/c^2}$$

relativ zu O' bewegen. Die Ladungsdichte wäre λ_0 für einen Beobachter, der sich mit den Elektronen mitbewegt. Es gilt daher auch analog

$$\lambda_- = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta_D^2}} \quad \rightarrow \ \lambda'_- = \frac{\sqrt{1-\beta_D^2}}{\sqrt{1-\beta'^2}}\lambda_-$$

Mit dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten (Tabelle TB)

$$\beta' = \frac{\beta_D - \beta}{1 - \beta\beta_D}$$

können wir β' eliminieren:

$$\lambda'_- = \frac{1-\beta\beta_D}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda_- = \gamma(1-\beta\beta_D)\lambda_-$$

Die Transformation für die Ladungsdichte ist

$$\rho' = \rho\gamma(1 - \beta\beta_D) \tag{79}$$

Während für den ruhenden Beobachter O der Leiter elektrisch neutral ist ($\lambda_- = -\lambda_+$), ergibt sich für den mit der Ladung q bewegten Beobachter O' eine von Null verschiedene Ladungsdichte:

$$\lambda' = \lambda'_+ + \lambda'_- = \frac{\lambda_+}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{(1 - \beta\beta_D)\,\lambda_-}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\frac{v}{c^2}v_D\lambda_+$$

wobei hier $\lambda_+ = -\lambda_-$ verwendet wurde. Die Stromstärke für O ist $I = \lambda_- v_D$. Für den bewegten Beobachter O' hingegen:

$$I' = \lambda'_+(-v) + \lambda'_- v'$$

Setzt man für λ'_+, λ'_- und v' die obigen Ausdrücke ein und berücksichtigt $\lambda_+ = -\lambda_-$ so ergibt sich:

$$I' = \frac{I}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma I$$

Der bewegte Beobachter O' mißt einen um den Faktor γ größeren Strom als der ruhende Beobachter O.

Auf die bewegte Ladung q wirkt für den mitbewegten Beobachter O' die Kraft

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = \frac{q\,\lambda'\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r} = \gamma q\frac{v}{c^2}\frac{I}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r}$$

Der ruhende Beobachter mißt entsprechend der Lorentz-Transformation (Tabelle LT):

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}'}{\gamma} = q\frac{v}{c^2}\frac{I}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r}$$

Da das Feld eines stromführenden Leiters den Betrag $B = \mu_0\, I/(2\pi r)$ hat und senkrecht zu $\vec{v}$ und $\hat{r}$ gerichtet ist, läßt sich obige Gleichung auch schreiben:

$$\vec{F} = \frac{q}{c^2\,\varepsilon_0\mu_0}(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{80}$$

dies ist identisch gleich der Lorentzkraft, wenn folgende Beziehung für die Feldkonstanten gilt

$$\boxed{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}} \tag{81}$$

Relativistische Effekte machen sich hier schon bei kleinen Geschwindigkeiten bemerkbar, denn die Driftgeschwindigkeit liegt bei einigen mm/s; die wesentlich höheren thermischen Geschwindigkeiten mitteln sich ja heraus.

Zusammenfassung: *Das Magnetfeld eines Stromes und die Lorentzkraft auf eine bewegte Probeladung q im Magnetfeld lassen sich mit Hilfe der Relativitätstheorie allein aus dem Coulomb-Gestz und den Lorentz-Transformationen herleiten. Das Magnetfeld ist also keine prinzipiell vom elektrischen Feld unabhängige Eigenschaft geladener Materie, sondern ist im Sinn der Relativitätstheorie eine Änderung des elektrischen Feldes bewegter Ladungen infolge der Lorentz-Kontraktion.* Daher spricht man vom **elektromagnetischen Feld** einer bewegten Ladung.

11.7 Transformationsgleichungen für das elektromagnetische Feld

Zur Herleitung der Transformationsgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beim Übergang von einem ruhenden zu einem bewegten Inertialsystem betrachen wir den Fall von Abb. 86, daß im Laborsystem S sich beide Ladungen $Q(x(t), 0, 0)$ und $q(x(t), y, z,)$ parallel zueinander mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ bewegen und daher im bewegten System S' ruhen.

Der ruhende Beobachter im Laborsystem S mißt die Kraftkomponenten

$$\begin{aligned} F_x &= qE_x \\ F_y &= q(E_y - v_x B_z) \\ F_z &= q(E_z + v_x B_y) \end{aligned}$$

auf die Probeladung q und schließt daraus auf das Vorhandensein eines elektrischen und magnetischen Feldes.

Der mit den Ladungen mitbewegte Beobachter O' mißt nur ein elektrisches Feld (allerdings ein anderes als der ruhende Beobachter):

$$F'_x = qE'_x; \quad F'_y = qE'_y; \quad F'_z = qE'_z$$

Zwischen den Kraftkomponeneten in beiden Systemen müssen gemäß Tabelle TB für $\vec{u} = 0$ die Transformationen gelten (beachte: hier ist das gestrichene System S' das System, in dem die Ladungen ruhen):

$$F'_x = F_x; \quad F'_y = \gamma F_y; \quad F'_z = \gamma F_z$$

woraus der Zusammenhang zwischen $\vec{E}, \vec{B}$ und $\vec{E}'$ folgt:

$$E'_x = E_x \tag{82}$$

$$\begin{aligned} E'_y &= \gamma(E_y - v_x B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + v_x B_y) \end{aligned} \tag{83}$$

Für $\vec{v}$ parallel zur 1-Achse (x-Achse)

$$E'_1 = E_1 \tag{84}$$

$$\left.\begin{aligned} E'_y &= \gamma(E_y - v_x B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + v_x B_y) \end{aligned}\right\} \quad E'_i = \gamma(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})) \quad (i = 2,3; \text{ bzw. } y, z) \tag{85}$$

Für die Rücktransformation, die den Fall beschreibt, daß Q im System S ruht, so daß O' ein elektrisches und magnetisches Feld beobachtet, gilt wegen $v'_x = -v_x$:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x \\ E_y &= \gamma(E'_y + v'_x B'_z) \\ E_z &= \gamma(E'_z - v'_x B'_y) \end{aligned}$$

Für $\vec{v}$ parallel zur 1-Achse

$$E_1 = E'_1 \tag{86}$$

$$\left.\begin{aligned} E_y &= \gamma(E'_y + v_x B'_z) \\ E_z &= \gamma(E'_z - v_x B'_y) \end{aligned}\right\} \quad E_i = \gamma(\vec{E}' - (\vec{v} \times \vec{B}')) \quad (i = 2,3) \tag{87}$$

Für den allgemeinen Fall, daß sich Q sowohl gegen O als auch gegen O' bewegt, messen beide Beobachter sowohl elektrische als auch magnetische Felder, aber von unterschiedlicher Größe. Die entsprechenden Transformationsgleichungen ergeben sich aus 82 und 86 und den Lorentztransformationen für die Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) \end{aligned}$$

Für $\vec{v}$ parallel zur 1-Achse

$$B'_1 = B_1 \tag{89}$$

$$\left.\begin{aligned} B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) \end{aligned}\right\} \quad B'_i = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E})) \quad (i = 2,3) \tag{90}$$

und die entsprechende Rücktransformationen

$$\begin{aligned} B_x &= B'_x \\ B_y &= \gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z) \\ B_z &= \gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y) \end{aligned}$$

Für $\vec{v}$ parallel zur 1-Achse $\quad B_1 = B'_1$ (92)

$$\left.\begin{aligned} B_y &= \gamma(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z) \\ B_z &= \gamma(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y) \end{aligned}\right\} \quad B_i = \gamma(\vec{B}' + \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}')) \quad (i = 2, 3) \tag{93}$$

Die Gleichungen 82, 86, 89 und 92, in denen die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gekoppelt auftreten, zeigen, daß elektrische und magnetische Felder eng miteinander verknüpft sind, → Dieses gekoppelte Feld bezeichnet man als **elektromagnetisches Feld**. Die Trennung in rein elektrische oder magnetische Komponenten hängt vom Bezugssystem ab. Beachte: alle Beobachter in beliebigen Inertialsystemen müssen zu widerspruchsfreien, konsistenten Aussagen über die Bewegungsgleichungen kommen.

Die Transformationsgleichungen sagen aber noch mehr: Ist in einem Inertialsystem (S) $\vec{E} = \vec{0}$, dann gilt in jedem anderen System S', das sich mit v relativ zu S bewegt:

$$\vec{E}' = (\vec{v} \times \vec{B}') = -(\vec{v}' \times \vec{B}') \qquad \text{gilt nur, wenn } \vec{E} = \vec{0} \tag{94}$$

und ebenso: Ist in einem Inertialsystem (S) $\vec{B} = 0$, dann gilt in allen anderen Systemen S'

$$\vec{B}' = -\frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}') = \frac{1}{c^2}(\vec{v}' \times \vec{E}') \quad \text{gilt nur, wenn } \vec{B} = \vec{0} \tag{95}$$

d.h. es kann nicht in einem weiteren Inertialsystem eines der Felder verschwinden, es sei denn, beide Felder verschwinden in allen Inertialsystemen. Dies zeigt die Verflechtung von elektrischem und magnetischem Feld.

11.7.1 Ladungsinvarianz

Im System S befindet sich im ortsfesten ($\vec{v}_D = \vec{0}$) Volumen $\Delta V = \Delta l_x \Delta l_y \Delta l_z$ die Ladung ΔQ. Der Beobachter in S' bestimmt dieses Volumen mit $\Delta V' = \Delta l'_x \Delta l'_y \Delta l'_z$, welche Ladung registriert er? Mit der Lorentzkontraktion von $\Delta l'_x$ und der Transformation für die Ladungsdichte (79) ergibt sich

$$\Delta Q' = \rho' \Delta V' = \rho\gamma \cdot \Delta l_x \sqrt{1 - \beta^2} \Delta l_y \Delta l_z = \rho \Delta V = \Delta Q$$

12 Zeitlich veränderliche Felder

Bisher haben wir nur zeitlich konstante elektrische und magnetische Felder behandelt, die durch ruhende Ladungen, bzw. stationäre Ströme hervorgerufen werden. Alle Eigenschaften dieser *statischen* Felder lassen sich durch sieben Gleichungen beschreiben

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 & \qquad \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \rho/\varepsilon_0 & \qquad \nabla \cdot B &= 0 \\ \vec{E} &= -\nabla\phi & \qquad \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Wie müssen nun diese Gleichungen erweitert werden, wenn sich die Ladungsdichten ρ und Stromdichten $\vec{j}$ und damit auch elektrische und magnetische Felder zeitlich ändern? Wir werden vorest "langsame" zeitliche Veränderungen betrachten, bei denen die Laufzeit des Lichtes über den Durchmesser der Ladungs- bzw. Stromverteilung sehr klein ist gegen die zeitliche Änderung von ρ und $\vec{j}$.

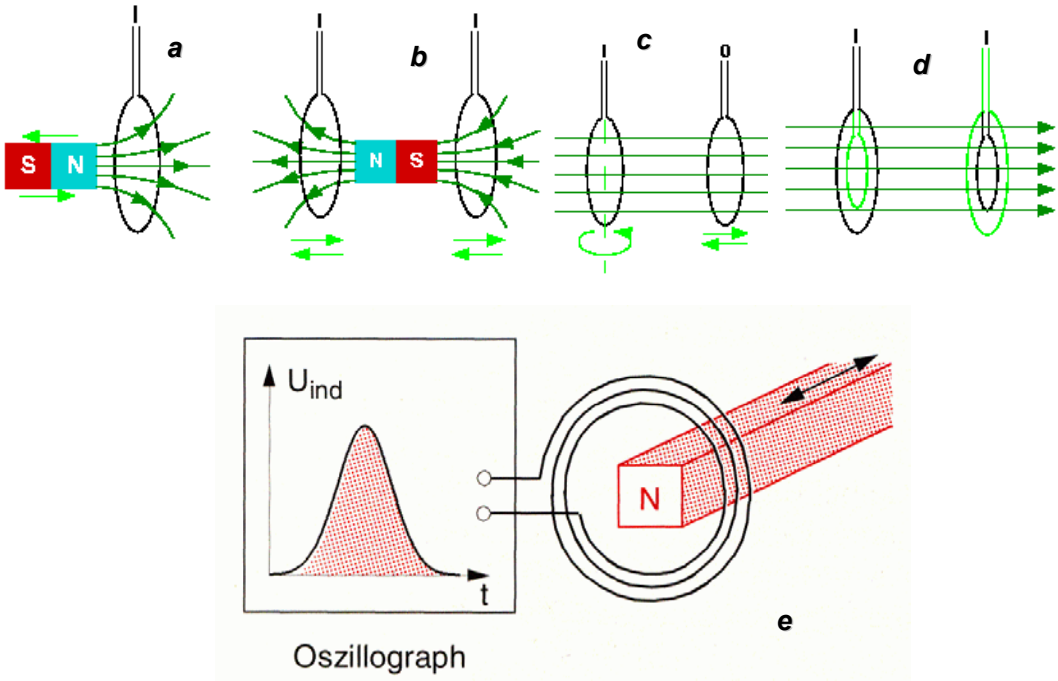


Abbildung 88: Zum Induktionsgesetz

12.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Michael Faraday (1791-1867) erkannte 1831, daß entlang eines Leiters in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld eine elektrische Spannung (= **Induktionspannung**) entsteht. Bewegt man einen Stabmagneten durch eine Leiterschleife, so beobachtet man (Abb. 88e) eine zeitabhängige Spannung $U(t)$, die am Oszillograph sichtbar gemacht werden kann.

- Faradaysche Experimente (Abb. 88):
- a) Bewegung eines Stabmagneten (inhomogenes Feld) durch eine Leiterschleife → in der Leiterschleife wird eine Spannung induziert (bzw. es fließt ein Strom, dessen Richtung von der Bewegungsrichtung bzw. Polausrichtung abhängt); die Stromstärke hängt von der Geschwindigkeit ab.
- b) Bewegung der Leiterschleife durch ein inhomogenes Feld ergibt äquivalente Ergebnisse.
- c) Bewegung der Leiterschleife im homogenen Feld: Ändert sich die Richtung zwischen der Leiterschleife und den Feldlinien nicht, so ergibt sich kein Strom in der Schleife. Bei Rotation der Leiterschleife fließt ein Strom.
- d) Änderung der Schleifenfläche ergibt einen Strom, das Vorzeichen hängt davon ab, ob die Fläche vergrößert oder verkleinert wird. Ist die Schleifenfläche parallel zu den Feldlinien, wird bei einer Flächenänderung keine Spannung bzw. Strom induziert.

12.1.1 Bewegung eines Leiters im homogenen Magnetfeld

Wir betrachten die Bewegung eines stabförmigen Leiters senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld (Abb. 89). In dem Inertialsystem S, in dem B herrscht und der Stab sich mit $\vec{v}$ in positve y-Richtung bewegt, soll ursprünglich kein $\vec{E}$-Feld herrschen. In diesem Fall tritt im Ruhesystem des Leiters S'

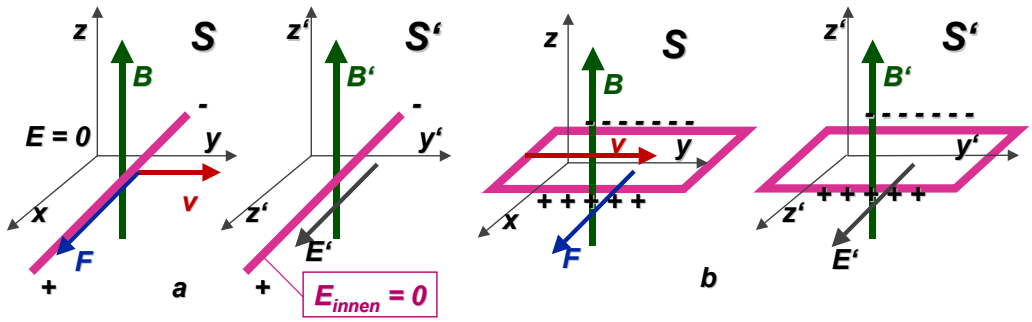


Abbildung 89: Bewegung eines Leiters (a) bzw. Leiterschleife (b) durch ein homogenes B-Feld im Bezugssystem S; das Bezugssystem S' bewegt sich mit dem Stab, dort tritt das Feld $\vec{E}'$auf.

sowohl ein $\vec{B}'$-Feld (das für kleine $\vec{v}$ sich kaum von $\vec{B}$ unterscheidet) als auch ein $\vec{E}'$-Feld nach Gleichung 94 auf

$$\vec{E}' = -(\vec{v}' \times \vec{B}') = \vec{v} \times \vec{B}'$$

Dieses $\vec{E}'$-Feld wird von dem ruhenden Leiter so modifiziert, daß im Leiterinneren $\vec{E} = \vec{0}$ ist. Es werden daher im Leiter aufgrund von $\vec{E}'$ Ladungsträger fließen, die die Leiterenden positiv und negativ aufladen und somit $\vec{E}'$ im Leiterinneren kompensieren.

Im ursprünglichen Bezugssystem S wirkt auf die Ladungsträger die Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$. Wenn $\vec{B}$ und $\vec{v}$ in die positive z- bzw. positive y-Richtung zeigen, wird sie bei positiven Ladungsträgern in die positive x-Richtung zeigen. Diese Ladungstrennung führt im bewegten Leiter zu einem positiven bzw. negativen Ladungsüberschuß an den Stabenden, d.h. zu einem $\vec{E}$-Feld im Inneren. Gleichgewicht herrscht wenn $q \cdot \vec{E} = -q(\vec{v} \times \vec{B})$ ist. Abgesehen von der Lorentzkontaktion des Stabes, die sich nur mit β^2 ändert, gleicht die beobachtete Ladungsverteilung in S der in S'. Die elektrischen Felder unterscheiden sich jedoch, da in S $\vec{E}$ nur von den Flächenladungen herrührt, während sich das Feld in S' aus den Flächenladungen und $\vec{E}'$ zusammensetzt. Ein Beobachter in S' (Ruhesystem des Leiters) sagt: Im Stabinneren existiert kein elektrisches Feld, obwohl ein Magnetfeld vorhanden ist, geht davon keine Kraft aus, da sich keine Ladungen bewegen und sich der Leiter in dem stationären $\vec{E}'$ Feld befindet. Der Beobachter in S stellt im Stabinneren ein Feld $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ fest, das eine Kraft $q\vec{E} = -q\vec{v} \times \vec{B}$ auf die Ladungsträger ausübt und die Lorentzkraft somit ausgleicht. Beide Beschreibungen sind richtig.

Bewegt man eine Leiterschleife durch das homogene Feld (Abb. 89b), so treten die gleichen Prozesse wie beim Stab auf: Es findet eine Ladungstrennung statt, verbunden mit der Spannung U, aber solange das Magnetfeld sich nicht ändert, passiert nichts Weiteres (ähnlich wie beim Halleffekt). Das Ringintegral verschwindet $\oint \vec{E}.d\vec{s} = 0$, denn in beiden Schenkeln sind - *im Umlaufsinn des Drahtes gesehen* - die Felder (Kräfte) entgegengesetzt gerichtet.

Ein Magnetfeld induziert in einer Leiterschleife eine Spannung U_{ind} *mit resultierendem Strom* I, wenn das von der Leiterschleife umschlossene Feld $\vec{B}$ sich ändert oder die Fäche A der Leiterschleife sich ändert. Der magnetische Fluß verknüpft $\vec{B}$ und $\vec{A}$: $\Phi = \int \vec{B}.d\vec{A}$. Wir suchen einen Zusammenhang zwischen Φ und U_{ind} in einem Gedankenexperiment, bei dem sich ein Leiterbügel einer Stromschleife im Feld $\vec{B}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{s}/dt$ nach rechts bewegt (Abb. 90). Die Lorentzkraft auf die Ladungsträger q bewirkt einen Strom im Uhrzeigersinn. Oder: In dem Leiter wird ein elektrisches Feld aufgebaut $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B})$ das den Strom I im Urzeigersinn durch die Leiterschleife treibt. (siehe Gleichung 94). Diesen Strom kann man sich auch durch eine von der Bewegung des Leiterstückes induzierten negativen Spannung verursacht denken:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -\vec{E} \cdot \vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} = -\vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{l}) = -\vec{B} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{s} \times \vec{l}) \\ U_{ind} &= -\vec{B}\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \tag{96}$$

Durch die Bewegung des Bügels wird die Fläche $\vec{A}$ vergrößert, die Änderung $d\vec{A}/dt$ ist positiv, somit parallel zu $\vec{B}$ gerichtet: $\vec{A}$ bildet mit dem Kreisstrom eine *Links*schraube! Die zeitliche Veränderung

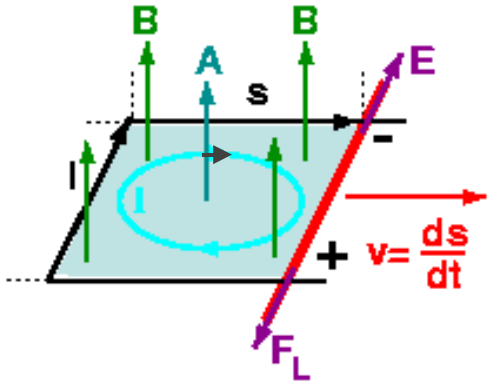


Abbildung 90: Der Leiterbügel bewegt sich mit $\vec{v}$ und vergrößert die Fläche dA.

der Fläche kann entweder positiv oder negativ sein kann. Wir können dies für beliebig geformte Leiter verallgemeinern:

$$U_{ind} = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\int \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) = -\int_A \vec{B} \cdot \frac{d}{dt} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{97}$$

$$\boxed{U_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi}{dt}} \tag{98}$$

Induktionsgesetz: die in der Leiterschleife induzierte Spannung ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des Flusses durch die Leiterschleife. Bei konstanter Schleifenfläche kann die Flußänderung natürlich auch durch ein zeitlich veränderliches Feld hervorgerufen werden.

Wir begegnen einem neuen Phänomen: Bisher galt für geschlossene Leiterschleifen mit Stromquellen die Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes $\oint \vec{E}.d\vec{s} = 0$. Jetzt beobachten wir in einer geschlossenen Leiterschleife eine Stromfluß ohne Stromquellen, und das elektrische Feld ist nicht mehr wirbelfrei. Bei zeitlich veränderlichem Magnetfluß gilt für eine geschlossene Leiterschleife das Induktionsgesetz

$$\oint \vec{E}.d\vec{s} = \int_A rot\vec{E}.d\vec{A} = U = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

wobei $\vec{A}$ die von $\vec{s}$ umschlossene Fläche ist. Dies läßt sich auch differenziell schreiben und bedeutet, daß ein zeitlich variables Magnetfeld ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt:

$$\boxed{\text{rot}\vec{E} = -\frac{dB}{dt}} \tag{99}$$

Beachte: Das durch Ladungen erzeugte $\vec{E}$-Feld ist konservativ, d.h. es gilt $rot\vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{E}$ kann als Gradient eines Potentials dargestellt werden: $\vec{E} = -\nabla\phi$. Im Gegensatz dazu gilt für ein elektrisches Feld, das durch ein zeitlich variables Magnetfeld erzeugt wird $rot\vec{E} \neq 0$, die Feldlinien sind geschlossen und dieser Anteil des elektrischen Feldes kann nicht als Gradient eines skalaren Potentials dargestellt werden (siehe Abb. 91).

Die Induktionsspannung in einer rotierenden Leiterschleife (mit der Kreisfrequenz ω), die sich in einer Zylinderspule befindet kann mit einem Oszillograph gemessen werden (Abb.92a). Dasselbe ergibt sich, wenn die Leiterschleife fest steht (senkrecht zur Zylinderachse) und die Feldspule mit einem Wechselstrom $I = I_0 \sin\omega t$ betrieben wird. Damit ist das Wechselfeld $B(t) = \mu_0\, n\, I_0 \sin\omega t$ und die induzierte Spannung in der Meßspule mit N Windungen und der Fläche F, die mit der Zylinderachse den Winkel α einschließt, ist:

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0\, n\, I_0 N F \cos\alpha\, .\, \omega\, .\cos\omega t \tag{100}$$

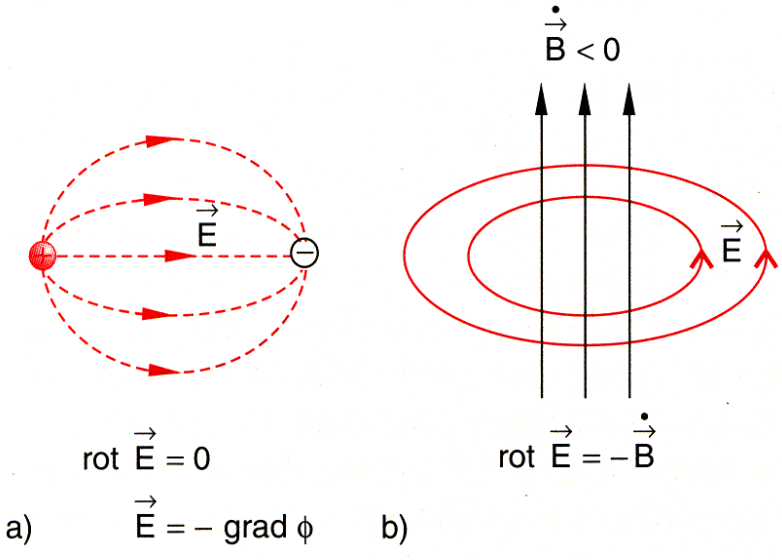


Abbildung 91: Quellen des $\vec{E}$-Feldes: stationäres Quellenfeld (a), elektrisches Wirbelfeld durch $-d\vec{B}/dt$ erzeugt (b)

Bei rechteckförmiger Variation des Magnetfeldes entstehen in der Meßspule Spannungsspitzen; siehe Abb. 93b.

Die rotierende Leiterschleife im homogenen $\vec{B}$-Feld ist das Prinzip eines Wechselstromgenerators. Dabei ist der Rotationswinkel zeitabhängig $\alpha(t) = \omega t$; (siehe Abb. 92) und $\Phi(t) = BNF\cos\alpha(t) = BNF\cos(\omega t)$. Die induzierte Spannung ist wieder

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = B\,N\,F\,\omega\,sin\omega t.$$

12.2 Lenzsche Regel

Das Auftreten des negativen Vorzeichens im Induktionsgesetz wird als Lenzsche Regel bezeichnet und erlaubt folgende Interpretationen:

- Das durch den induzierten Strom I erzeugte Magnetfeld $\vec{B}_{ind}$ ist immer entgegengesetzt zu dem die Induktion verursachenden Magnetfeld B gerichtet.
- Die durch den induzierten Strom I erzeugte Lorentzkraft $F_{ind} = I(\vec{l} \times \vec{B})$ist immer gegen die Kraft gerichtet, die den Drahtbügel bewegt.
- Das System widersetzt sich jeder Änderung des magnetischen Flusses (Abb. 94).

12.2.1 Bewegung durch Induktion

Demonstration der Lenzschen Regel durch einen als Pendel aufgehängten Al Ring: Der Ring wird bei Annäherung des Permanentmagneten abgestoßen, bei Entfernen angezogen. Wird der Ring aufgeschlitzt, können sich keine Induktionsströme ausbilden und der Effekt ist nicht feststellbar.

Magnetische Kanone: Wenn die Änderung des Flusses $d\Phi/dt$ sehr groß ist, weil z.B. dt sehr klein ist dann können in dem Al Ring sehr große Ströme

$$I_{ind} = -\frac{1}{R_{Al}}\frac{d\Phi}{dt}$$

induziert werden. Dadurch entsteht ein Dipolmoment, $\vec{p} = I\vec{A}$,dessen Richtung entgegengesetzt zum Magnetfeld ist.

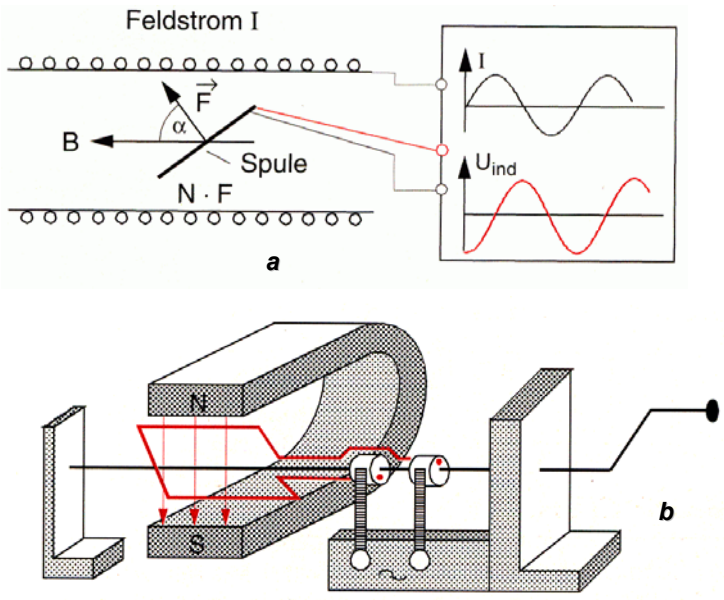


Abbildung 92: Induktionsspannung einer Leiterschleife im zeitlich variablen Magnetfeld (a), Modell eines Wechselspannungsgenerators (b)

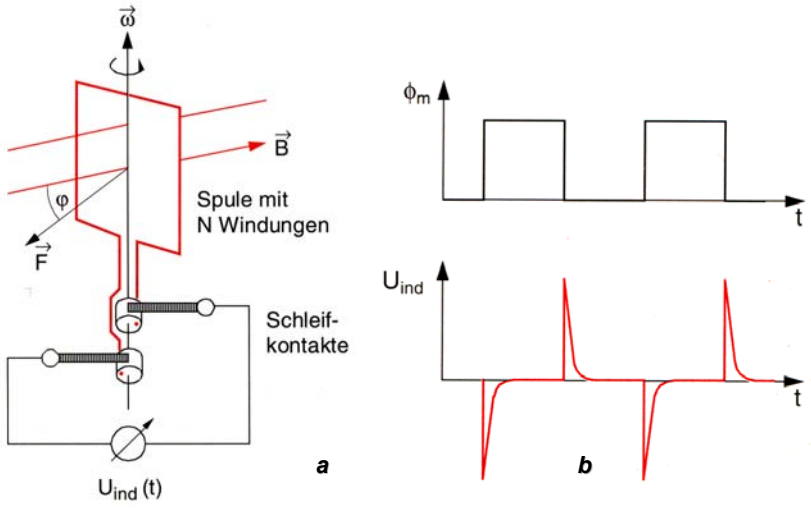


Abbildung 93: Erzeugung einer induzierten Wechselspannung (a), bei rechteckförmiger Variation des B-Feldes treten Spannungsspitzen in der Meßspule auf (b).

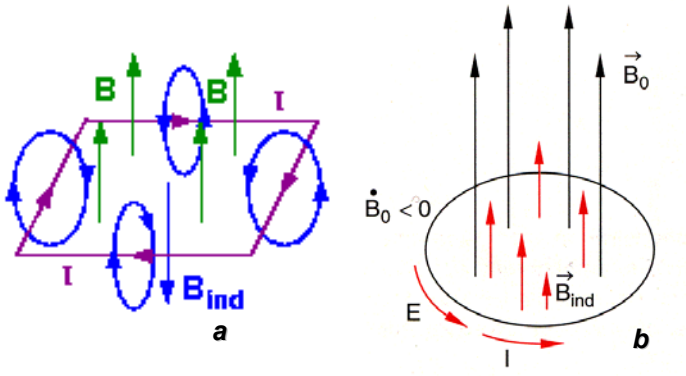


Abbildung 94: Zur Lenzschen Regel: Das durch den induzierten Strom erzeugte Magnetfeld $\vec{B}_{ind}$ ist immer entgegengesetzt zu dem erzeugenden $\vec{B}$-Feld (a), derselbe Sachverhalt mit $-d\vec{B}/dt$ (b).

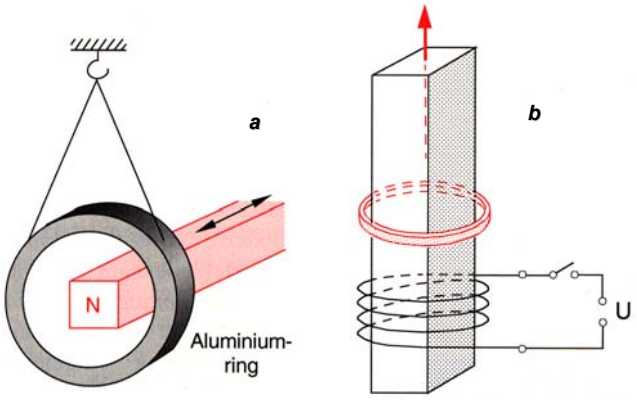


Abbildung 95: Demonstration der Lenzschen Regel: schwingender Al Ring (a), magnetische Kanone (b)

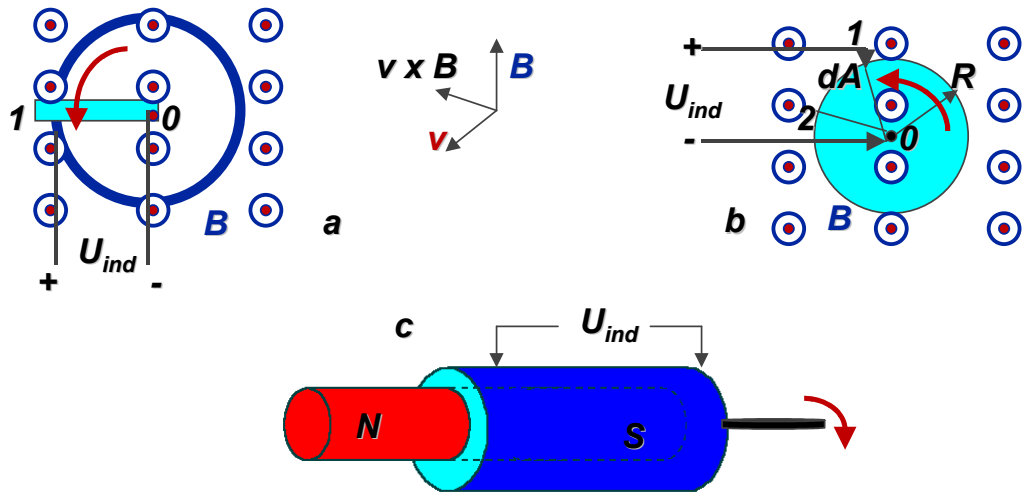


Abbildung 96: Modell eines Unipolargenerators, Schleifer rotiert mit ω im homogenen Feld $\vec{B}$ auf einem leitenden Ring (a), leitende Scheibe rotiert im Feld (b), leitender Zylinder rotiert um einen Permanetmagnet (c).

Unipolargenerator (Wirbel-Gleichstromgenerator): Rotiert eine Metallscheibe in einem homogenen Feld, so wird zwischen Drehachse und dem Scheibenrand eine Spannung gemessen (Abb.96). Dies ist die Basis für die Unipolarmaschine bzw. die Umkehrung des Barlowschen Rades. Wir betrachten vorerst einen Bügel, der auf dem Kreisring mit der der Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$ rotiert. Nach Gleichung97 ist das Ringintegral nur auf der Strecke 0-1 verschieden von Null, denn auf 1-2 ist das skalare Produkt Null und die beiden Spannungsabgriffe bewegen sich nicht:

$$U_{10} = \int_0^1 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^1 v.B.dl = \omega B \int_0^1 RdR = \omega B \frac{R^2}{2}$$

Dasselbe muß auch $U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$ ergeben (Integrationsweg(b) in Abb. 97). Die "zeitabhängige" Fläche ist $A(t) = \omega t.R^2/2$ [7]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{R^2}{2}\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}B\,R^2\omega$$

$$U_{ind} = -\frac{1}{2}B\,R^2\omega = -\frac{B\,R^2}{2}\frac{2\pi}{\tau} = -\frac{A\,B}{\tau}$$

Gegenüber dem 1. Lösungsweg (a) ergibt sich nun eine negative Spannung. Folgende Überlegung zeigt, daß beide Ergebnisse korrekt sind. Beim 2. Lösungsweg (b) ist man von einem positiven Fluß ausgegangen, das bedeutet, daß $d\vec{A}$ und $\vec{B}$ parallel sind. Diesem $\vec{A}$ entspricht ein positiver Umlaufsinn $d\vec{s}$ (d.h. gegen den Uhrzeigersin Abb. 97b). U_{ind} ist aber negativ herausgekommen, also gegen diesen positiven Umlaufsin. Dies entspricht dem 1. Ergebnis, wo wir eine positive Spannung zwischen 3-4 (bzw. 1-0) erhalten . Die Spannung nimmt von der Drehachse nach außen zu; mit $A = 1\,\mathrm{m}^2$, $B = 1\,\mathrm{T}$ und der Umlaufzeit von $\tau = 0.02\,\mathrm{s}$ wird eine Spannung U =50 V erzeugt. Da der Innenwiderstand eines Unipolargenerators klein ist (Kupferscheibe) können damit hohe Gleichströme $I = \frac{1}{R_i}\frac{d\Phi}{dt}$ bis zu 50 kA erzeugt werden.

12.2.2 Wirbelströme

Induktionsströme, die in ausgedehnten Leitern auftreten, nennt man Wirbelströme. Bewegt man eine Leiterplatte senkrecht durch ein räumlich begrenztes Magnetfeld mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$, so entstehen in der Platte geschlossene Wirbelströme (siehe Abb. 99): In der rechten Hälfte der Platte (in

[7] Denn $2\pi \triangleq R^2\pi$, $\omega t \triangleq A(t) \;\Rightarrow\; A(t) = \omega t.R^2/2$

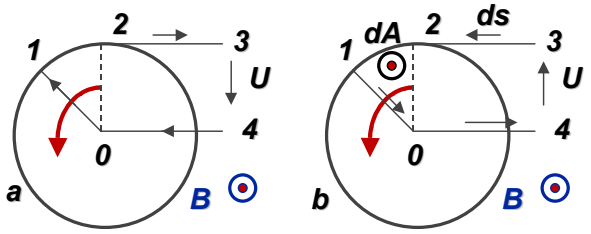


Abbildung 97: Integrationswege für Lösung (a) und (b)

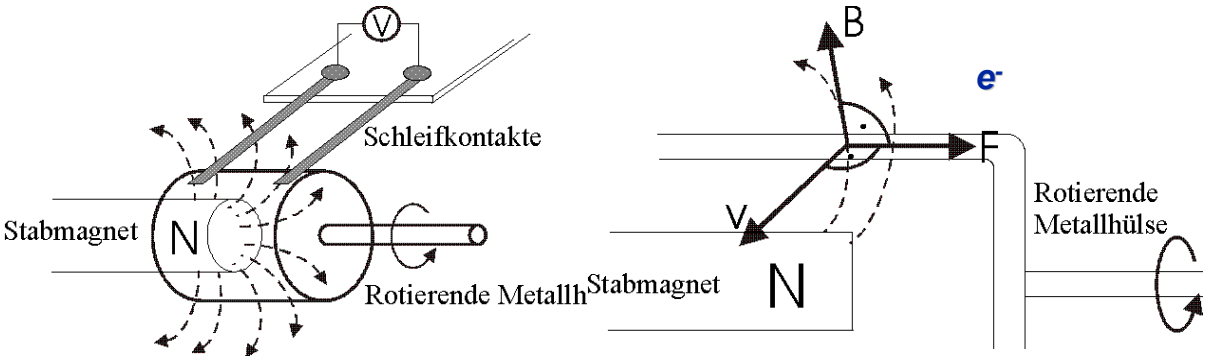


Abbildung 98: Unipolargenerator, Kraft auf die Leitungselektronen (b).

Richtung von $\vec{v}$) nimmt die vom Feld durchsetzte Fläche dauernd ab $\Rightarrow\ \vec{B}d\vec{A} < 0$, d.h. I ist bezüglich $\vec{B}$ rechtshändig. In der linken Hälfte der Platte ist $\vec{B}d\vec{A} > 0$, $\Rightarrow\ I$ ist bezüglich $\vec{B}$ linkshändig.

Die Änderungen des Flusses induzieren daher zwei gegenläufige Ströme in der linken und rechten Hälfte der Platte und bremsen entsprechend der Lenzschen Regel die Bewegung der Platte. Die Bewegungsenergie wird in Joulsche Verluste d.h. Wärme umgewandelt $\Rightarrow$ Prinzip der Wirbelstrombremse. Wird die Platte lamelliert, so können sich nur geringe Wirbelströme ausbilden und die Dämpfung (Bremswirkung) ist gering. ($\Rightarrow$ Siehe Abb. 100, Waltenhofensches Pendel).

12.2.3 Selbstinduktion und Gegeninduktion

Für die technische Anwendung von Spulen ist es unpraktisch, zur Bestimmung der Flußänderung das Zeitintegral über die gemessene Spannung zu berechnen

$$\Delta\Phi = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \int \vec{B}.d\vec{F} = -\int_{t_1}^{t_2} U_{ind}(t)\,dt$$

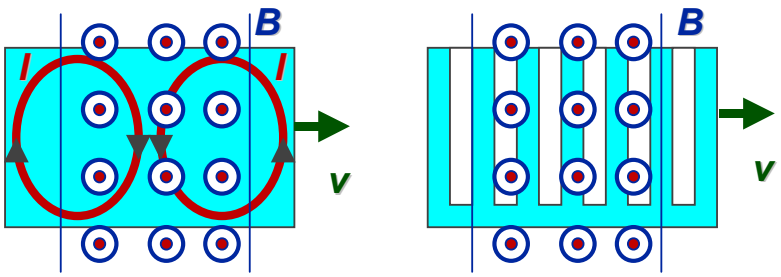


Abbildung 99: Wirbelströme in einer im B-Feld bewegten Leiterplatte

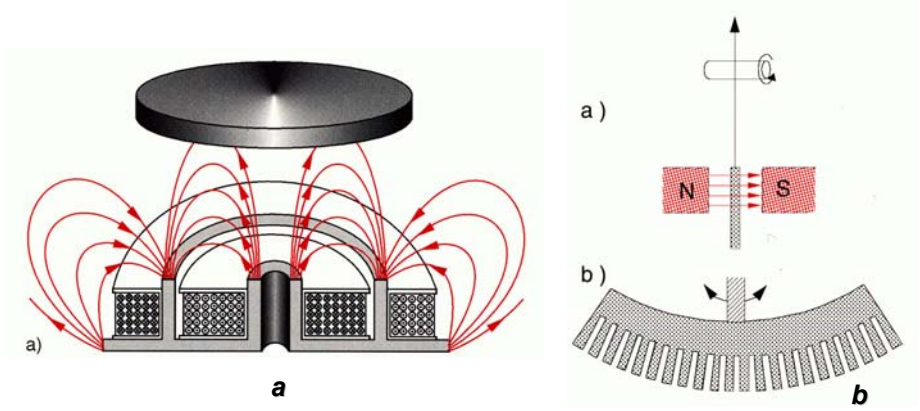


Abbildung 100: Levitation durch Wirbelströme (a), Waltenhofensches Pendel (b)

Man sucht nach einem Zusammenhang zwischen magnetischem Fluß und Strom durch die Leiterkonfiguration und bezeichnet die skalare Größe als Induktivität. Dies vereinfacht die Rechnung, auch wenn eine exakte Berechnung dies Zusammenhanges komplex sein kann.

Selbstinduktion: In einer stromdurchflossenen Spule wird bei zeitlicher Änderung des Stromes der magnetische Fluß geändert. Nach der Lenzschen Regel und dem Induktionsgesetz entsteht dabei in der Spule selbst eine Induktionsspannung, die der von außen "stromtreibenden" Spannung entgegengesetzt ist. Da das Magnetfeld proportional zum Strom durch die Spule ist, ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen magnetischem Fluß und Strom:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \vec{B}.d\vec{F} = L\,.I \\ [L] &= 1\,\frac{\text{V.s}}{\text{A}} = 1\ \text{H} \end{aligned}$$

wobei die Proportionalitätskonstante **Selbstinduktionskoeffizient** oder (Selbst-) **Induktivität** genannt wird. Damit ergibt sich für die Induktionspannung

$$U_{ind} = -L\frac{dI}{dt} \tag{101}$$

In der Spule, in der eine Feldänderung $d\vec{B}/dt$ durch eine Stromänderung dI/dt erzeugt wird, wird selbst eine Spannung U_{ind} induziert.

Einschaltvorgang: Zur Zeit $t = 0$ wird an den Kreis mit Widerstand R und Spule die konstante Spannung U_0 gelegt (Abb 101). Mit der Maschenregel (Summe der Quellspannungen = Summe der Spannungsabfälle) gilt:

$$U_0 + U_{ind} = RI \ \Rightarrow\ U_0 = RI + L\frac{dI}{dt}$$

Dies ist eine lineare inhomogene DG 1. Grades. Ihre Lösung ergibt sich als Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen DG $RI + L\frac{dI}{dt} = 0$ mit dem Ansatz $I(t) = Ce^{-\lambda t} \ \Rightarrow\ I(t) = Ce^{-(R/L)t}$ und einer speziellen Lösung der inhomogenen DG. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DG ist für $t = \infty$ der stationäre Fall $I_0 = U_0/R$. Mit den Anfangsbedingung für $t = 0:\ I(0) = 0$ und $U(0) = U_0$ ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen DG:

$$I(t) = Ce^{-(R/L)t} + \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{102}$$

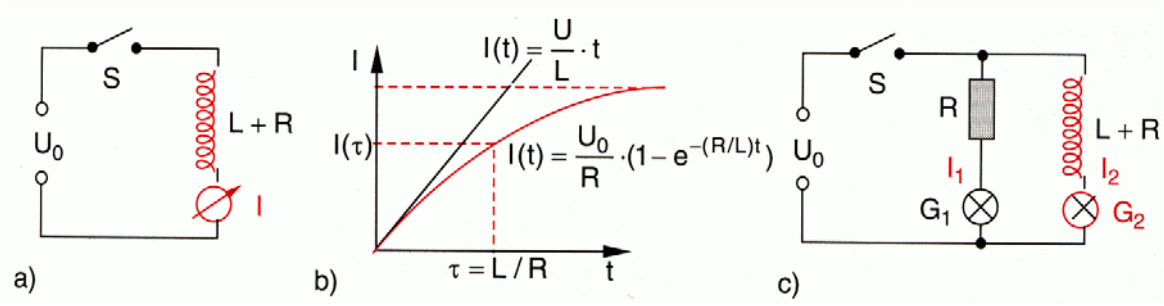


Abbildung 101: Einschaltvorgang

Der Strom steigt beim Einschalten nicht plötzlich auf I_0, sondern mit der Zeitkonstante $\tau = L/R$ langsam an. $I(\tau)$ hat etwa 63% des stationären Stromes $I(\infty) = I_0 = U_0/R$. Dies kann am Oszillograph oder auch mit Lampen sichtbar gemacht werden (Abb. 101 b). Für $R = 0$ ergäbe sich ein linearer Stromanstieg $I(t) = (U_0/L)t$.

Ausschaltvorgang: Für $t < 0$ ist der Schalter in Abb. 102 geschlossen, dann fließt $I_1 = U_0/R_0$ durch den Widerstand R_0 und $I_2 = U_0/R_L$ durch die Spule. Für $R_0 > R_L$ ist $I_2 > I_1$. Bei $t = 0$ wird der Schalter geöffnet, so ergibt dies mit den Anfangsbedingungen $U_0(t = 0) = 0$ und $I_2(0) = I_0$:

$$0 = I_2 R - U_{ind} = I_2 R + L\frac{dI_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad I_2(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Über der Spule entsteht eine Induktionsspannung

$$U_{ind} = -I_2(R_L + R_0) = -L\frac{dI_2}{dt}$$

und durch das Amperemeter (Abb. 102d) fließt nun ein größerer Strom $I_1 = -I_2$ in umgekehrter Richtung als vor dem Öffnen des Schalters. Mit $U_0 = I_0 R_0$ ergibt sich

$$U_{ind} = -U_0\frac{R_L + R_0}{R_L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

sodaß für $R_0 >> R_L$ die induzierte Spannung $U_{ind}(t = 0) \approx (R_0/R_L)U_0$ wesentlich größer als U_0 wird. Dies kann bei kleinem R_L zu sehr hohen Induktionsspannungen führen! $\Rightarrow$ Durchbrennen der Glühlampe.

Leuchtstofflampe und deren Zündung: Die Leuchtstofflampe (LL) ist seit vielen Jahren die wichtigste Lichtquelle. In ihr wird das Licht der zwischen dem Kathoden- und Anodenfall liegenden positiven Säule ausgenützt, wobei die Röhrenlänge bis zu 3 m sein kann. Die Elektroden sind Glühoxidelektroden; in dem röhrenförmigen Glaskolben ist Ne oder Ar-Gas (10-100 Pa) und eine entsprechend dosierte Menge Hg, das in Form von Tröpfchen an der Glaswand hängt. Nach dem Zünden über das Ar kommt es zur Verdampfung des Hg, wobei sich ein Druck von 100-200 Pa ausbildet. Durch Stoßionisation kommt es zu einer selbständigen Gasentladung mit blauem Licht (Niederdruck-Quecksilberdampflampe). Etwa 95% der Lichtausbeute ist unsichtbare UV-Strahlung, die durch Leuchtstoffe an der Glaswand in sichtbares Licht umgewandelt wird. Das Licht der LL ist daher überwiegend eine Sekundärstrahlung, da primär vorwiegend UV Strahlung (Stoßionisation von Hg-Atomen) erzeugt wird. Als Leuchtstoffe werden Phosphate, Worframate und Molybdate verwendet.

Grundsätzlich ist der Betrieb von einer LL mit Gleich- oder Wechselstrom möglich. Bei Wechselstrom dient die Induktivität einerseits als Vorwiderstand (Blindwiderstand) und andererseits zur Zündung der Gasentladung (Abb. 103). Der Starter ST besteht aus einer Glimmlampe, bei der meist beide Elektroden als Bimetallstreifen ausgebildet sind. Die Netzspannung (∼220 V) ist nicht ausreichend, um die Gasentladung zu zünden, jedoch ausreichend, um die Glimmlampe, die nur eine Zündspannung von etwa 160 V benötigt, zu zünden. Durch den schwachen Glimmstrom (30 mA) verbiegen sich die

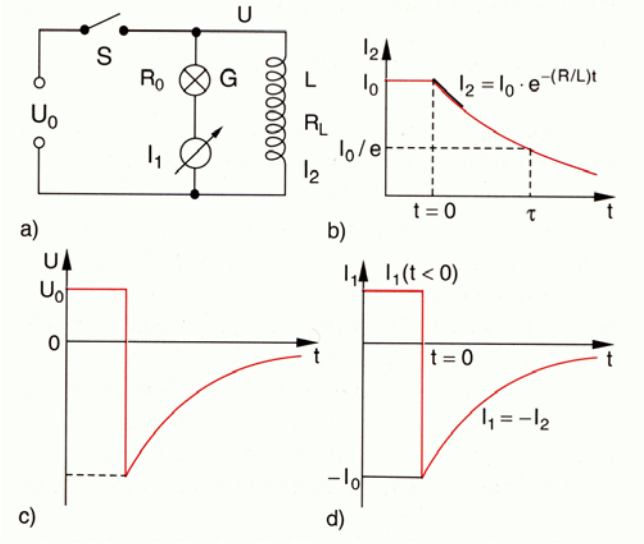


Abbildung 102: Entladevorgang

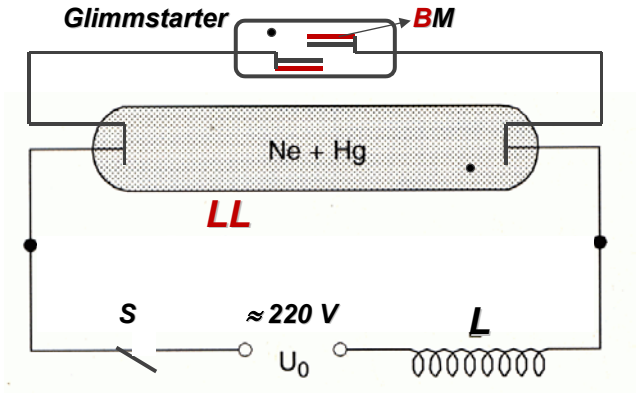


Abbildung 103: Zündschaltung von Leuchtstofflampe

Bimetallstreifen und bilden einen Kontakt, der kurzzeitig einen hohen Strom (bis zum 2 fachen Betriebsstrom) zur Folge hat. Dadurch werden die Glühoxidelektroden der LL aufgeheizt und bewirkt eine hohe Elektronenemission. Während dieser Vorheizzeit von etwa 0,5 s kühlen die Bimetallstreifen wieder ab, biegen sich zurück und unterbrechen den Stromkreis. Dadurch entsteht in der Spule (mit Eisenkern) ein großes $d\Phi/dt$. $\Rightarrow$ Die Zündspannung (600-1000 V) der LL ist erreicht und die LL zündet über das Ar-Gas die Entladung, das Hg verdampft, und es bildet sich der Betriebsstrom I aus. Bei Betrieb entseht an der Spule ein Spannungsabfall U_L und auf die LL entfällt dann die Betriebsspannung 100-110 V. Der Starter ST liegt daher bei Betrieb der LL auf 100-110 V und spricht nicht an, da seine Zündspannung 160 V beträgt.

Selbstinduktion einer Zylinderspule: Das Feld einer langen Spule (Länge l) mit n Windungen pro Meter ist $B = \mu_0\, n\, I$ und der Fluß durch eine Windung mit der Fläche F ist $\Phi = B\, F = \mu_0\, n\, I\, F$. Bei einer Änderung des Spulenstromes dI/dt wird die Flußänderung

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0\, n\, F \frac{dI}{dt}.$$

Dabei wird an den Enden der Spule mit $N = n\, l$ Windungen die Spannung induziert

$$U_{ind} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0\, n^2 l\, F \frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Der Selbstinduktionskoeffizient L der Spule ist daher

$$L = \mu_0\, n^2 l\, F = \mu_0\, \frac{N^2\, F}{l} = \mu_0\, n^2\, V$$

Eine Spule hat dann eine große Induktivität, wenn N und F groß und l klein ist.

Die in der Spule gespeicherte Energie ist

$$\begin{aligned} W &= \int_T U_{ind} I\, dt = -L \int I \frac{dI}{dt} \cdot dt \\ &\boxed{|W| = L \int_0^I I\, dI = \frac{LI^2}{2}} \end{aligned} \tag{103}$$

Beachte das Vorzeichen: Nimmt der Strom mit der Zeit zu, verliert die Spule Energie (elektrische Energie wird in magnetische umgewandelt; nimmt der Strom ab, gewinnt die Spule Energie (magnetische Energie wird in elektrische umgewandelt)

Selbstinduktion einer parallelen Doppelleitung Zwei lange, parallele Drähte mit Radius r_0 im Abstand d, durch die der Strom I in entgegengesetzter Richtung fließt, bilden eine elektrische Doppelleitung (Abb. 104). $\Rightarrow$ Wichtig für Übertragung elektrischer Leistung. Da das Außenfeld eines Drahtes $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}$ ist, gilt auf der senkrechten Verbindungslinie:

$$B^a = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{d}{2}+x} + \frac{1}{\frac{d}{2}-x}\right)$$

Im Inneren der Drähte ist für den linken ($I > 0; x < 0$) bzw rechten ($I < 0; x > 0$) Draht

$$B_l^i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2}\left(\frac{d}{2}+x\right) \quad \text{bzw.} \quad B_r^i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0^2}\left(\frac{d}{2}-x\right)$$

Der Fluß durch ein Stück der Doppelleitung mit der Länge l durch die Fläche $F = d.l$ in der x-z-Ebene ist

$$\Phi = l\left[\int_{-d/2+r_0}^{d/2-r_0} B^a dx + \int_{-d/2}^{-d/2+r_0} B_l^i dx + \int_{d/2-r_0}^{d/2} B_r^i dx\right] = \frac{\mu_0\, I\, l}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{d-r_0}{r_0}\right)$$

Damit ist der Selbstinduktionskoeffizient

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\, l}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{d-r_0}{r_0}\right)$$

Die Induktivität einer Doppelleitung nimmt also mit dem Abstand d logarithmisch zu und nimmt mit abnehmenden Drahtradius zu. Daher verwendet man für induktionsarme Doppelleitungen flache Bänder, die nur durch eine dünne Isolation getrennt sind; für $d = 2r_0$ erhält man die minimale Induktion

$$L(d = 2r_0) = \frac{\mu_0\, l}{2\pi}$$

Gegenseitige Induktion Wir betrachten die Wirkung eines stromdurchflossenen Kreises 1 mit I_1 auf den Stromkreis 2 mit dem Strom I_2 (Abb.105). Nach dem BS erzeugt der Kreis 1 im Punkt $P(r_2)$ ein Magnetfeld $\vec{B}$ mit dem Vektorpotential

$$\vec{A}(r_2) = \frac{\mu_0\, I_1}{4\pi} \oint_{s_1} \frac{d\vec{s}_1}{r_{12}}$$

wobei $d\vec{s}_1$ ein Wegelement der Kreises 1 ist. Dieses $\vec{B}$ Feld erzeugt einen Fluß

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int_F rot\, \vec{A} \cdot d\vec{F} = \oint_{s_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}_2 = \frac{\mu_0\, I_1}{4\pi} \oint_{s_1} \oint_{s_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{12}} = L_{12} I_1$$

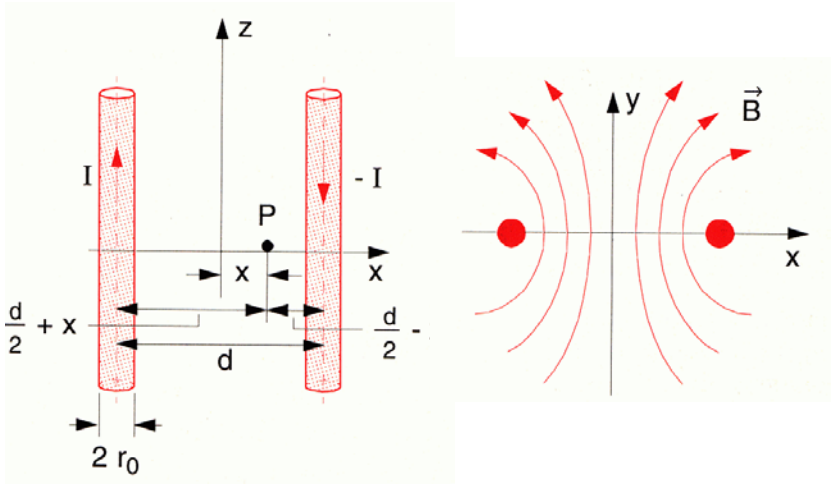


Abbildung 104: Doppelleitung

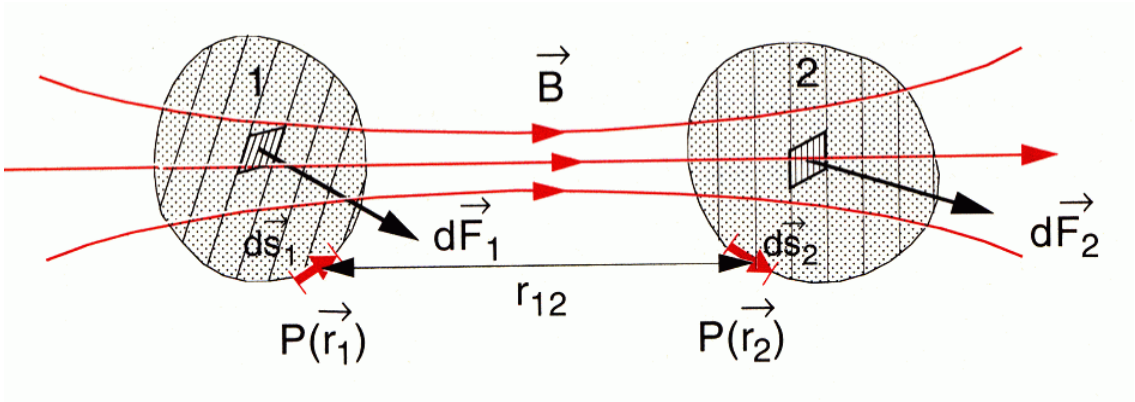


Abbildung 105: Zur Gegeninduktion

Der Proportionalitätsfaktor

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{s_1} \oint_{s_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{12}} \tag{104}$$

heißt Koeffizient der gegenseitigen Induktion oder Gegeninduktivität. Er hängt von der Geometrie der Leiterkonfiguration ab und ist häufig nur numerisch berechenbar.

Einfache Beispiele: Rechteckige Leiterschleife im homogenen Feld einer Zylinderspule mit n Windungen pro Meter wie in Abb. 92a. Der Fluß durch die Leiterschleife ist

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{F} = \mu_0 \, n \, I \, F \, \cos\alpha$$

wobei α der Winkel zwischen der Zylinderachse und der Flächennormalen ist. Die Gegeninduktivität ist daher

$$L_{12} = \mu_0 \, n \, F \, \cos\alpha$$

sie wird Null für $\alpha = 90^o$.

Zwei **kreisförmige Leiterschleifen** mit verschiedener Orientierung in Abb. 106 haben dann die größte Gegeninduktivität, wenn die beiden Leiterebenen parallel sind. Der kleinste Wert ergibt sich bei senkrechter Anordnung (Abb. 106c), da der Fluß der ersten Spule durch die zweit Null wird.

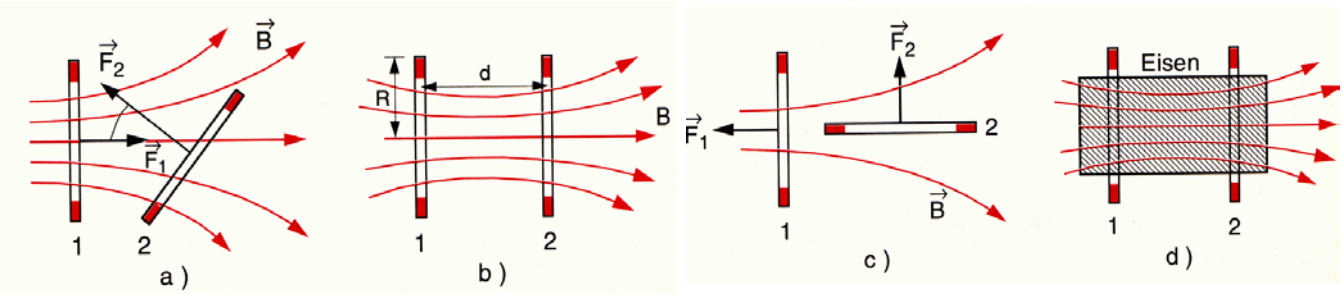


Abbildung 106: Zur Gegeninduktion von zwei Leiterschleifen

Für eine parallele Anordnung (Abb. 106b) geht für kleine Abstände $d << R$ praktisch der gesamte Fluß vom ersten Kreis (mit $\vec{B}_z = (\mu_0 I/2R)$) durch die zweite Spule. Damit wird die Gegeninduktivität

$$L_{12} = R^2 \pi \frac{\mu_0}{2R} = \frac{\mu_0\, \pi}{2} R$$

für $d << R$ unabhängig vom Abstand d. Für große Entfernungen $d >> R$ ist $B \approx \mu_0\, I\, F/(2\pi d^3)$, sodaß

$$L_{12} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{F}{d^3}$$

Während diese Grenzfälle einfach zu lösen sind, muß für den allgemeinen Fall das Integral in Gleichung 104 berechnet werden → elliptische Integrale.

12.3 Energie des Magnetfeldes

Die beim Abschalten der äußeren Spannungsquelle in Abb. 102 im Widerstand R verbrauchte Energie muß im Magnetfeld der Spule gesteckt haben.

$$W_{magn} = \int_0^\infty U\, I\, dt = \int_0^\infty I^2\, R\, dt = \int_0^\infty I_0^2\, e^{-(2R/L)t}\, R\, dt = \frac{I_0^2\, L}{2}$$

wobei $I_0 = I(t < 0)$ der vor dem Abschalten stationäre Strom durch die Spule ist. ⇒ Supraleitende Spulen können als Energiespeicher verwendet werden.

Mit $L = \mu_0 n^2\, V$ ergibt sich die Energiedichte des Magnetfeldes zu

$$w_{mag} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \mu_0\, n^2 I_0^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Vergleich der Energie des elektrischen und magnetischen Feldes:

$$\boxed{W_{el} = \frac{CU^2}{2} \qquad w_{el} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}} \tag{105}$$

$$\boxed{W_{magn} = \frac{L\, I^2}{2} \qquad w_{magn} = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}} \tag{106}$$

12.4 Maxwellscher Verschiebungsstrom

In vielen Fällen ist die bisherige Form des Ampereschen Gesetztes

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{F} \qquad \text{oder} \qquad rot\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

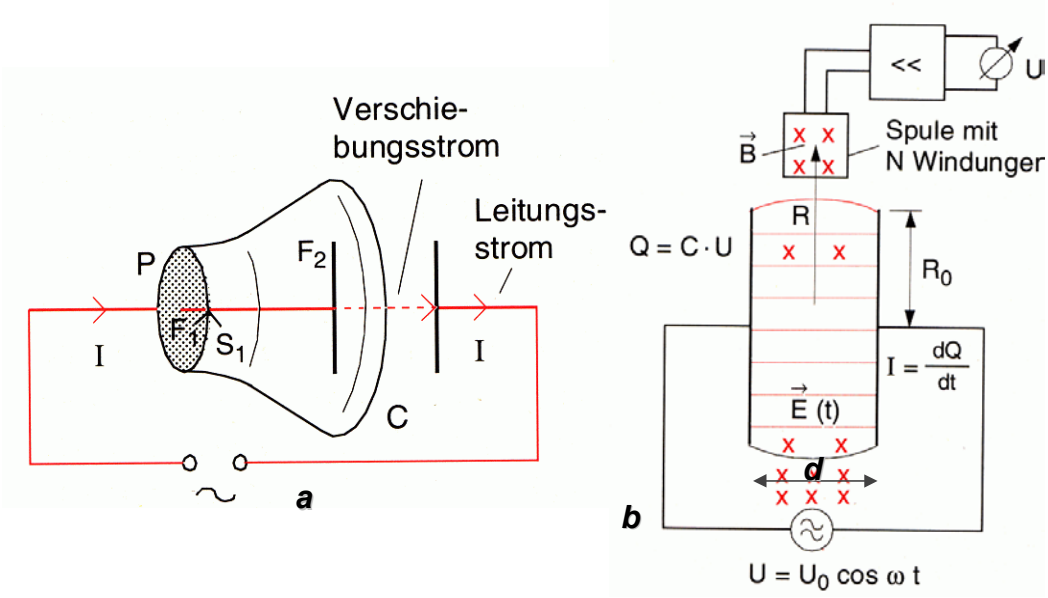


Abbildung 107: Zum Verschiebungsstrom (a), Messung des $\vec{B}$-Feldes, das vom Verschiebungsstrom erzeugt wird (b).

nicht eindeutig, insbesonders wenn man die integrale Form von $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ verwendet muß das Ringintegral für beliebige Wege C um den stromführenden Leiter und das Flächenintegral für beliebige Flächen F gelten, die von diesen Wegen umrandet werden.

In Abb.107a ist ein Stromkreis mit Kondensator gezeigt, durch den ein zeitlich variabler Strom fließt. Wählt man als Integrationsweg die kreisförmige Kurve S_1 so kann man als Fläche die Kreisfläche F_1 annehmen, aber auch jede beliebige geschlossene Fläche, die S_1 als Berandung hat; z.B. die ausgebeulte Fläche F_2, die durch das Innere des Kondensators geht, wo die im üblichen Sinn definierte Stromdichte Null ist. Das im Punkt P berechnete Magnetfeld wird bei der ersten Wahl mit F_1 durch das Amperesche Gesetz einen sinnvollen Wert ergeben, während es bei der zweiten Fläche Null wäre.

Um diesen Widerspruch aufzulösen, wurde von Maxwell im Jahr 1865 [8] der Verschiebungsstrom eingeführt. Wenn beim Aufladen des Kondensators ein Strom in den Leitungen fließt, ändert sich die Ladung $Q = \varepsilon_0\vec{E}.\vec{F}$ auf den Kondensatorplatten und damit auch das elektrische Feld zwischen den Platten

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0\vec{E}.\vec{F}\right) = \varepsilon_0\,\vec{F}\frac{d\vec{E}}{dt}$$

Damit läßt sich ein Verschiebungsstrom $I_V = \varepsilon_0\,\vec{F}.\,d\vec{E}/dt$ und damit eine Vershiebungsstromdichte definieren:

$$\boxed{\vec{j}_V = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \tag{107}$$

Sie ist direkt mit der zeitlichen Änderung des $\vec{E}$ Feldes verknüpft. Die partiellen Ableitungen wurden hier gewählt, da dies auch für inhomogene Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ gilt. Das erweiterte Amperesche Gesetz ist mit dem Verschiebungsstrom

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\int_F(\vec{j}+\vec{j}_V)\cdot d\vec{F} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j}+\vec{j}_V) = \mu_0\vec{j} + \mu_0\,\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Wegen $\mu_0\,\varepsilon_0 = 1/c^2$ läßt sich die differentielle Form auch schreiben

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \tag{108}$$

[8] James Clerk Maxwell (1831- 1879)

Magnetfelder werden nicht nur von Strömen, sondern auch von zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern erzeugt.

Anmerkung

Erst mit dem Verschiebungsstrom wird die Kontinuitätsgleichung erfüllt (Ladungserhaltung ist gerettet). Aus Gleichung 108 wird

$$\mathrm{div}\cdot\mathrm{rot}\vec{B} = 0 = \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{E}$$

was mit $div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$div\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{109}$$

Das verallgemeinerte Amperesche Gestz kann experimentell mit einem Plattenkondensator (kreisförmige Platten mit Radius R_0) überprüft werden, an den man eine hochfrequente Wechselspannung $U_C = U_0\cos\omega t$ anlegt (Abb. 107b). Der Verschiebungsstrom ist

$$I_V = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU_C}{dt} = -CU_0\omega\sin\omega t$$

Die Magnetfeldlinien sind konzentrische Kreise um die Symmertrieachse des Kondensators. Das $\vec{B}$ Feld ist am Rand der Kondensatorplatten $B = \mu_0 I_V/2\pi R_0$ und läßt sich mit einer Induktionsspule mit N Windungen und einer Windungsfläche F, die senkrecht zu den Feldlinien steht, messen. Der Fluß in der Meßspule ist $\Phi = N\,F\,B$ und die induzierte Wechselspannung ist:

$$U_{ind} = -N\,F\frac{dB}{dt} = -\frac{\mu_0}{2\pi R_0}NF\,C\frac{d^2U_C}{dt^2} = \frac{\mu_0}{2\pi R_0}NF\,CU_0\,\omega^2\cos\omega t$$

Abschätzung der induzierten Spannung und des erzeugten $\vec{B}$-Feldes: $F = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$, $N = 1000$, $R_0 = 0,2\,\mathrm{m}$, $U_0 = 100$ V, $\omega = 2\pi.10^6\,\mathrm{s}^{-1}, d = 0,1$ m, $\Rightarrow$ $C = \varepsilon_0.\pi R_0^2/d = 11.10^{-12}$ F, $\Rightarrow$ $U_{ind}^{\max} = (4\pi.10^{-7})/(2\pi.0,2).11.10^{-12}.100.(2\pi.10^6)^2$ V$= 4,8$ mV; $B_0 = \mu_0 I_V/(2\pi R_0) = 6,9.10^{-9}$ T.

13 Maxwellgleichungen und elektrodynamische Potentiale

Die Feldgleichungen für stationäre Ladungen und Ströme

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 & \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \mathbf{0} & \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \\ \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi & \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \end{array} \qquad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$$

werden mit dem Induktionsgesetz und der Einführung der Verschiebungsstromdichte $\partial\mathbf{D}/\partial t$ zu den Maxwellgleichungen:

$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho_{eff}/\varepsilon_0$	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_{frei}$	$\int_F \mathbf{D}\cdot d\mathbf{F} = Q_{frei}$	Gaußsches Gesetz, Quellenfeld
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0}$	$\int_F \mathbf{B}\cdot d\mathbf{F} = 0$	keine Monopole, Wirbelfeld
$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\partial\mathbf{E}/\partial t$	$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$	$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = I + \frac{d}{dt}\int_F \mathbf{D}\cdot d\mathbf{F}$	Amperesches Gesetz
$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$	$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$	$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_F \mathbf{B}\cdot d\mathbf{F} = U = -\frac{d\Phi}{dt}$	Induktionsgesetz

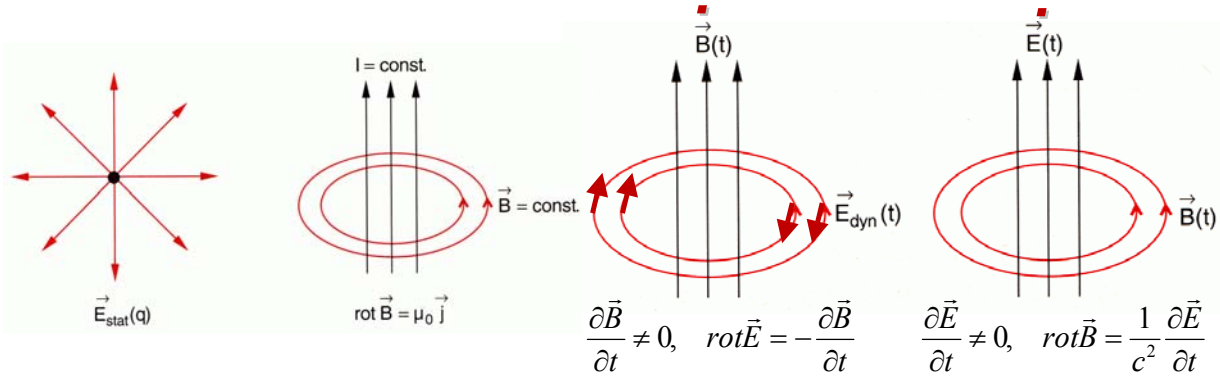


Abbildung 108: Anscgauliche Darstellung der Maxwellgleichungen

Zusammen mit der Lorentzkraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ und der Newtonschen Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ beschreiben diese Gleichungen alle elektromagnetische Phänomene. Elektrische Felder werden sowohl von Ladungen *als auch von* zeitlich variablen Magnetfeldern erzeugt. Magnetische Felder werden sowohl von Strömen *als auch von* von zeitlich variablen elektrischen Feldern erzeugt, siehe auch Abb. 108

- Die erste MW GL $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ gibt den Zusammenhang zwischen elektrischen Ladungen und elektrischen Feldern wieder. Die Ladungen erscheinen als Quellen des el. Feldes. Der Fluß der **D-** Linien durch eine geschlossene Oberfläche **F** ist gleich der Summe der eingeschlossenen freien Ladungen. Mathematisch wird dies in integraler Form durch den Gaußschen Satz und in differentieller Form, daß die Quelldichte des el. Feldes die Ladungsdichte ist.

- Die 2. MW-GL $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ formuliert den analogen Zusammenhang für das Magnetfeld bzw. den Fluß (magnetische Kraftflußdichte) mit dem wesentlichen Unterschied, daß es **keine** magnetischen Ladungen (Monopole) gibt. Das **B-**Feld ist daher quellenfrei und alle **B-Linien** sind geschlossen.

- Die 3. MW-GL beschreibt, wie sich Ströme mit geschlossenen magnetischen Feldlinien umgeben. Neben dem natürlichen Ladungsstrom tritt als Ursache auch die **Verschiebungsstromdichte** durch die vom Feld eingeschlossene Fläche auf. Sie enhält einen echten Stromdichteanteil $\dot{\mathbf{P}}$ (denn $\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}$), der aus der zeitlichen Verschiebung der positiven gegen die negativen Ladungen des Dielektrikums unter dem exterenen Feld (Polarisationsladungen) resultiert, und einem Vakuumanteil $\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$. Den Übergang von der integralen zur differentiellen Form leistet der Stokessche Satz. Die integrale Form, nur auf den Ladungsstrom bezogen, wird oft als Amperesches Durchflutungsgesetz bezeichnet.

- Die 4. MW-GL beschreibt (in Analogie zur 3.) die Entstehung eines elektrischen Ringfeldes aus der zeitlichen Änderung des eingeschlossenen **B-**Feldes = Induktionsgesetz. Achtung auf das Vorzeichen zwischen 3. und 4. MW Gl. Da es keine magnetischen Ladungen gibt, gibt es auch keine magnetischen Ströme und folglich fehlt in der 4. der Anteil des el. Ringfeldes, der sich aus einem solchen Strom ergäbe. Sind keine freien Ladungen und Ströme zugegen, sind die Beziehungen von elektrischen und magnetischen Feldern zueinander durch die 3.und 4. MW GL *vollständig* beschrieben, woraus sich auch die Wellengleichungen für die miteinander verknüpften Feldamplituden **B** und **H** ergeben**.**

Die MG sind invariant gegenüber Lorenz-Transformationen, d.h. sie gelten in allen Inertialsystemen. Dies ist ersichtlich, wenn sie kovariant[9] formuliert werden, wie das in der theoretischen Elektrodynamik gemacht wird.Es gibt zwei Grenzfälle die wir weiter behandeln wollen:

[9] Unter Kovarianz versteht man die Unveränderlichkeit der Gleichungen bei einer Transformation der Variablen

- *Quasistationäre Ströme.* Das sind Ströme, die sich nur langsam mit der Zeit verändern. In diesem Fall kann die räumliche Abhängigkeit des Stromes und der damit verbundenen Felder von deren zeitlicher Abhängigkeit separiert werden. Es gilt daher: $I(\vec{r},t) = I_s(\vec{r}).I_z(t)$ beide Teile können getrennt voneinander behandelt werden. Die Separierbarkeit bedeutet, daß die explizit zeitabhängigen Terme in den MG vernachlässigt werden können. Wir haben z.B. das sehr kleine Magnetfeld berechnet, das durch den Verschiebungsstrom im Kondensator erzeugt wird. Aus der Separierbarkeit ergibt sich $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=\vec{0}$, die dann auch mit der Identität $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})=\vec{0}$ konsistent ist. Außerdem ist das quasi-stationäre elektrische Feld wirbelfrei $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$. Diese Bedingungen sind bekannt: Wir können das Problem der quasi-stationären Ströme daher im Rahmen der Kirchhoffschen Gesetze lösen.
- *Zeitlich schnell veränderliche Felder im ladungs- und stromfreien Raum.* In diesem Fall ist $\rho_{el}=0$ und $\vec{j}=0$ und die MG werden vollständig symmetrisch bezüglich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ (bis auf das Vorzeichen und c). Dies führt zur Entstehung von elektromagnetischen Wellen.

Die MG sind ein Sytem gekoppelter DG für die Felder **E** und **B.** Zur Lösung ist es sinnvoll sie mit dem skalaren Potential ϕ_{el} und dem Vektorpotential **A** zu entkoppeln. Da $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\neq\mathbf{0}$, kann **E** nicht mehr als $\nabla\phi_{el}$ dargestellt werden; es gilt jedoch (1.MWG):

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{0}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{t}}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{t}})=\mathbf{0}$$

Da $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi)\equiv 0$ können wir die Summe $(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathbf{t}})$ als Gradient eines Potentials schreiben

$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$$

$$\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

was für stationäre Felder $\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{0}$ in die übliche Form übergeht.

Das Vektorpotential ist durch $\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ nicht eindeutig bestimmt, da jede Funktion $\mathbf{A}+\mathbf{u}$ mit $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ das gleiche **B** Feld ergibt. (In der Magnetostatik verwendet man die Coulombeichung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{0}$). Für zeitlich variable Felder ist die **Lorenzsche Eichbedingung** zur Entkopplung der DG notwendig

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\qquad\text{Lorenz-Eichung}}$$

die für statische Felder in die Coulombeichung übergeht. Durch Einsetzen in die MG ist ersichtlich , daß diese mit obigen Bedingungen erfüllt werden. Aus $\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ folgt

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\phi)-\boldsymbol{\nabla}\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\qquad\text{da }\mathbf{rotgrad}\phi=0$$

und

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\equiv\mathbf{0}$$

Die Erweiterung der Poissongleichung für zeitlich variable Felder ergibt sich aus $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$ mit $\mathbf{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\nabla(-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ \text{ mit }\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\ \Rightarrow$$

$$\Delta\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Für das Vektorpotential ergibt sich aus der 3. MG mit $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\nabla\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A}$ und der Lorenz Eichung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) &= \mu_0\mathbf{j}+\frac{1}{c^2}\partial\mathbf{E}/\partial t\\
\boldsymbol{\nabla}(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t})-\Delta\mathbf{A} &= \mu_0\mathbf{j}+\frac{1}{c^2}\partial\mathbf{E}/\partial t\quad\text{mit}\quad-\boldsymbol{\nabla}\phi=\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\quad\Rightarrow\\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})-\Delta\mathbf{A} &= \mu_0\mathbf{j}+\frac{1}{c^2}\partial\mathbf{E}/\partial t
\end{aligned}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}$$

Mit der Einführung der elektrodynamischen Potentiale und der Lorenz-Eichung gehen die *gekoppelten DG erster Ordnung* für die Felder **E** und **B** (3. und 4.MG) in *entkoppelte DG 2.Ordnung* über:

$$\begin{aligned}\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{j}\end{aligned}$$

Im ladungs- und stromfreien Vakuum ($\rho = 0$ und $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) wird daraus die WELLENGLEICHUNG für ϕ und **A**

$$\Delta\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \qquad \Delta\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Damit werden die Felder **E** und **B** beschrieben, die sich als elektromagnetische Wellen im Vakuum mit der Phasengeschwindigkeit c ausbreiten.

Anmerkung: Der Vektor-Laplace-Operator auf **A** angewandt, $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{A}$, bedeutet, daß die Wellengleichung für das Vektorpotential **A** nur für kartesische Koordinaten (Komponententen A_x, A_y, A_z) benützt werden kann. D.h. die Wellengleichung für **A** ist nur in kartesischen Koordinaten gültig:

$$\begin{aligned}\Delta A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_x\\ \Delta A_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_y\\ \Delta A_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_z\end{aligned}$$